Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 143.

In vier Heften.

Berlin,
W. 10, Genthinerstraße 38.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1913.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 143.

	Seite
Bohr, H., Über die gleichmäßige Konvergenz *Dirichlet*scher Reihen . . .	203—211
Brandt, H., Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen . .	106—127
Horn, J., Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle	212—240
Knopp, K., Berichtigung zu dem Aufsatze „Über *Lambert*sche Reihen“ in Bd. 142	50
Koschmieder, L., Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe	285—293
Lichtenstein, L., Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. II. Abteilungsweise stetige Koeffizienten. Das zweite Randwertproblem. Gemischte Randbedingungen	51—105
Ostrowski, A., Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie . . .	255—284
Pál, J., Über die Existenz einer *Jordan*schen Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ bei vorgeschriebenem $\varphi(t)$	294—299
Perron, O., Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist. (Zweite Mitteilung.)	25— 50
Remak, R., Abschätzung der Lösung der *Pell*schen Gleichung im Anschluß an den *Dirichlet*schen Existenzbeweis	250—254
Schottky, F., Über die Funktionenklasse, die der Gleichung $F\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = F(x)$ genügt	1— 24
Steinitz, E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme	128—175
Sturm, R., Existenzbeweis des Punktes kleinster Entfernungssumme von vier gegebenen Punkten	241—249
Weyl, H., Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze	177—202
Zervos, P., Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles	300—312

265001

Ausgabedaten der Hefte von Band 143.

Heft 1 ausgegeben am 17. Mai 1913.
Heft 2 ausgegeben am 24. Juli 1913.
Heft 3 ausgegeben am 29. August 1913.
Heft 4 ausgegeben am 28. Oktober 1913.

Über die Funktionenklasse, die der Gleichung $F\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=F(x)$ genügt.

Von Herrn *F. Schottky* in Berlin.

Zu jeder linearen Substitution $x_1=\varphi(x)$ gehört eine Klasse von Funktionen, die in sich zurückkehren, wenn man von x zu x_1 fortschreitet. Da sie nicht immer eindeutig sind, muß angegeben werden, auf welchen von x zu x_1 führenden Wegen sie die ursprünglichen Werte wieder annehmen, und schon deshalb ist es nötig, die Klasse ganz genau zu definieren.

Man kann eine unendliche Reihe von Größen x_λ aufstellen, bezeichnet durch die sämtlichen ganzen Zahlen λ, von $-\infty$ bis $+\infty$, so daß x_0 gleich x selbst ist und je zwei benachbarte Größen zueinander in der Beziehung $x_{\lambda+1}=\varphi(x_\lambda)$ stehen. Solche Größen oder Punkte nennen wir kongruente; um allgemein x_λ durch x auszudrücken, verfahren wir so: $x_1-x=0$ ist eine quadratische Gleichung. Hat sie zwei verschiedene Wurzeln a, b, so ist

$$\frac{x_1-a}{x_1-b}\cdot\frac{x-b}{x-a}=q$$

eine Konstante; denn der eine Faktor verschwindet, wenn der andere unendlich wird. Fällt aber b mit a zusammen, so daß x_1-x für $x=a$ von der zweiten Ordnung verschwindet, so ist

$$\frac{(x-a)(x_1-a)}{x-x_1}=A$$

eine Konstante. Die Beziehung zwischen x und x_1 kann daher in einer der beiden Formen dargestellt werden:

$$\frac{x_1 - a}{x_1 - b} = q \cdot \frac{x - a}{x - b},$$

oder

$$\frac{A}{x_1 - a} = \frac{A}{x - a} + 1.$$

Daraus folgt, daß entweder

$$\frac{x_\lambda - a}{x_\lambda - b} = q^\lambda \frac{x - a}{x - b}$$

oder

$$\frac{A}{x_\lambda - a} = \frac{A}{x - a} + \lambda$$

ist. — Als „konjugiert“ bezeichnen wir zwei Punkte x, y, die in der Beziehung stehen: $x + y = a + b$. Dann gilt der Satz: Sind x, y konjugierte Punkte, so sind es auch x_λ und $y_{-\lambda}$. Denn setzen wir $-\lambda = \mu$, so ist

$$\frac{x_\lambda - a}{x_\lambda - b} = q^{-\mu} \frac{y - b}{y - a} = \frac{y_\mu - b}{y_\mu - a};$$

folglich $x_\lambda + y_\mu = a + b$. Wenn b mit a zusammenfällt, gilt dasselbe; dann hat man:

$$\frac{A}{x_\lambda - a} = -\frac{A}{y - a} - \mu = -\frac{A}{y_\mu - a};$$

also: $x_\lambda + y_\mu = 2a$.

Je nachdem b von a verschieden oder gleich a ist, führen wir ein:

$$c \frac{x - a}{x - b} = z \quad \text{oder} \quad \frac{A}{x - a} + c = z.$$

c ist eine willkürliche Konstante; sie ist der Wert von z für $x = \infty$. Die x-Ebene wird dadurch auf die z-Ebene abgebildet, und die Punktreihe x_λ in eine andere z_λ; und zwar ist in dem einen Falle z_λ gleich zq^λ, in dem anderen gleich $z + \lambda$. Die Punkte $z + \lambda$ bilden eine Reihe äquidistanter; sie liegen auf einer Geraden, die der Abszissenlinie parallel ist. Bei der Reihe zq^λ besteht ein Unterschied, je nachdem der absolute Wert von q gleich 1 oder von 1 verschieden ist. Ist $|q| \gtrless 1$, so haben die Punkte zwei Grenzstellen: $z = 0$ und $z = \infty$, an denen sie sich häufen; ist $|q| = 1$, so liegen sie sämtlich auf einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, und es ist im allgemeinen jede Stelle des Kreises eine Häufungsstelle. Man kann dennoch in allen Fällen von Funktionen sprechen, die in sich zurückkehren, wenn man von z zu z_1, oder von x zu x_1 übergeht. Nur muß man dann die Variable z oder x auf einen Teil ihrer Ebene beschränken, den man als Ausgangsgebiet betrachtet. Vor allem ist dies

nötig im Falle $z_1 = zq, |q| = 1$; es ist aber auch vorteilhaft in den beiden anderen.

Wir definieren das Ausgangsgebiet γ zunächst für die z-Ebene.

Es sei $z_1 = zq, |q| = 1$. Durchläuft z vom Nullpunkt aus die positive Abszissenlinie, so beschreibt zq eine zweite vom Nullpunkt ausgehende Gerade. γ ist der Winkelraum zwischen den beiden Geraden, zur Linken der positiven Abszissenlinie.

Ist $z_1 = z + 1$, so lassen wir z die ganze Ordinatenlinie beschreiben. z_1 beschreibt eine Parallele, die durch den Punkt 1 hindurchgeht; γ ist der zwischen beiden liegende Parallelstreifen.

Ist endlich $z_1 = zq$, und $|q| \leqq 1$, so durchläuft, wenn z einen Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschreibt, z_1 einen konzentrischen; γ ist die Ringfläche zwischen beiden.

Den Punkt c nehmen wir irgendwo im Innern von γ an. Da zu ihm der Punkt $x = \infty$ gehört, so ist der Teil der x-Ebene, der dem Gebiete γ entspricht, ein unendlich ausgedehnter; wir nennen ihn G. Aber er ist begrenzt durch zwei Kreise oder zwei Kreisbogen K_{-1} und K_1; die beiden Linien stehen durch die Gleichung $x_1 = \varphi(x)$ in der Beziehung, daß x_1 auf K_1 beschränkt wird, wenn man x selbst auf K_{-1} beschränkt. Und wenn x die Linie K_{-1} so durchläuft, daß das Gebiet G zur Linken bleibt, so bleibt G zur Rechten bei der entsprechenden Bewegung des Punktes x_1. Daraus folgt weiter, daß einem Punkte x, der außerhalb G, aber in der Nähe von K_{-1} liegt, ein kongruenter x_1 entspricht in der Nähe von K_1, aber innerhalb G.

Im Falle $z_1 = zq, |q| = 1$ wird die Begrenzung von G durch zwei von a nach b führende Kreisbogen gebildet. Die sich selbst entsprechenden Punkte a, b liegen also auf der Begrenzung des Gebiets; wir nennen sie die besonderen Punkte der Grenze.

Im Falle $z_1 = z + 1$ bilden zwei sich im Punkte a berührende Kreise die Begrenzung, und a ist, als Punkt der Grenze, doppelt zu rechnen. Denn wenn man die ganze Grenze so durchläuft, daß das Gebiet G beständig zur Linken bleibt, trifft man zweimal auf den Punkt a.

Im Falle $z_1 = zq, |q| \leqq 1$ wird die Grenze von G durch zwei sich nicht berührende Kreise gebildet; a liegt im Innern des einen, b in dem anderen Kreise; es gibt daher auf der Begrenzung keine besonderen Punkte.

Wir wollen den zweiten Fall ($z_1 = z + 1$) als den trigonometrischen, den dritten als den elliptischen bezeichnen.

Jetzt können wir die Klasse definieren. Sie umfaßt diejenigen Funktionen von x, die im Innern und auf der Grenze von G eindeutig sind und sich, abgesehen von den besonderen Punkten der Grenze, wie rationale verhalten, die aber auch in den besonderen Punkten der Grenze bestimmte Werte haben, denen sie sich stetig nähern, wenn x vom Innern des Gebietes G aus zu diesen Grenzstellen vordringt; die schließlich, was die Hauptsache ist, beim Übergange von x zu x_1 durch das Gebiet G hindurch zum Anfangswerte zurückkehren, so daß $F(x_1) = F(x)$ wird. Es ist noch zu bemerken: Im trigonometrischen Falle sind Klassenfunktionen zulässig, die im Berührungspunkte a zwei verschiedene Werte annehmen, je nachdem sich x dem Punkte von der einen oder anderen Seite her nähert. — Nun gelten die drei Sätze, von denen der erste keinen Beweis braucht:

Jede ganze Funktion von mehreren Klassenfunktionen ist wieder eine Klassenfunktion oder eine Konstante.

Es gibt keine Klassenfunktion, die in G nirgends unendlich wird.

Je zwei Klassenfunktionen ω, ω' sind durch eine algebraische Gleichung verbunden.

Nehmen wir an, es existiere eine Klassenfunktion ω, die im Innern und an der Grenze stets endlich bleibt. Jedes Polynom $g(\omega)$ stellt dann eine Klassenfunktion von derselben Beschaffenheit dar. Aber man kann die Koeffizienten von $g(\omega)$ so wählen, daß die neue Funktion in beliebig vielen Punkten von G verschwindet, speziell so, daß sie in den besonderen Punkten der Grenze den Wert 0 annimmt. Wir dürfen uns deshalb die Funktion ω selbst so gewählt denken, daß sie, wenn auf der Grenze besondere Punkte vorhanden sind, in ihnen nur den einen Wert 0 hat. Es sei x_0 ein beliebiger Punkt im Innern oder auf der Grenze von G. Liegt x_0 im Innern, so gibt es in beliebiger Nähe von x_0, also auch im Innern, andere Punkte x', in denen $|\omega|$ größer ist als in x_0. Ist x_0 ein besonderer Punkt der Grenze, so gilt dasselbe; denn dort ist ω gleich 0. Ist x_0 ein anderer Punkt der Grenze, z. B. auf K_{-1}, so gibt es, da dort ω regulär ist, ebenfalls in jeder Nähe von x_0 andere Punkte x', in denen $|\omega|$ größer ist als in x_0. Sie könnten außerhalb G liegen. Aber dann würden die ihnen kongruenten Punkte x_1' in der Nähe von K_1 und innerhalb G liegen.

Ist x_0 ein Punkt der anderen Randlinie K_1, so gilt dasselbe. Zu jedem Punkte im Innern und auf der Grenze von G würde es demnach andere Punkte geben, in denen der absolute Wert von ω größer ist. Das ist unmöglich; folglich existiert keine Funktion der vorausgesetzten Art.

Damit ist der zweite Satz bewiesen. Gehen wir zum dritten über. Wir nehmen zunächst an, daß die Funktionen ω und ω' in den besonderen Punkten der Grenze nicht unendlich werden. In allen anderen Punkten im Innern und auf der Grenze von G verhalten sich ω und ω' wie rationale Funktionen von x. Die Anzahl der Stellen, wo sie unendlich werden, sei n, und m die größte Ordnungszahl. Wir bilden aus ω und ω' ein Polynom r-ten Grades. Dies besteht, wenn man von dem konstanten Gliede absieht, aus $\frac{1}{2}r(r+3)$ einzelnen Funktionen, deren jede nur an den n Stellen unendlich wird, an keiner von höherer Ordnung als mr. Ist $\frac{1}{2}r(r+3)$ größer als nmr, also $r+3$ größer als $2mn$, so kann man die Koeffizienten so wählen, daß das Polynom im Gebiet G nirgends unendlich wird. Dann muß es nach dem zweiten Satz gleich einer Konstanten sein; es besteht also zwischen ω und ω' eine algebraische Gleichung. — Lassen wir jetzt zu, daß ω und ω' auch in den besondern Punkten der Grenze unendlich werden. Wir wählen einen Wert α, den ω und ω' in diesen besonderen Punkten *nicht* annehmen. Dann folgt aus dem Bewiesenen, daß eine algebraische Gleichung besteht zwischen $\frac{1}{\omega-\alpha}$ und $\frac{1}{\omega'-\alpha}$, also auch eine Gleichung zwischen ω und ω'.

Dies sind Sätze, die auch unter viel allgemeineren Voraussetzungen gelten. Statt des einen Linienpaares K_1, K_{-1} denken wir uns beliebig viele gegeben, jedes einzelne durch eine Gleichung $x_\lambda = \varphi_\lambda(x)$ so verbunden, daß gleichzeitig x die Linie $K_{-\lambda}$, x_λ die Linie K_λ durchläuft. Wir nehmen an, daß alle diese Linien die Begrenzung eines zusammenhängenden Teiles G der Ebene bilden; sie brauchen nicht Kreise oder Kreisbogen zu sein, und ebensowenig brauchen die $\varphi_\lambda(x)$ lineare Funktionen zu sein. Aber sie sollen so beschaffen sein, daß, wenn bei der Bewegung des Punktes x auf der Linie $K_{-\lambda}$ das Gebiet G zur Linken bleibt, bei der entsprechenden Bewegung von x_λ das Gebiet zur Rechten liegt.

Wir definieren im übrigen die Klassenfunktionen ganz so wie vorhin. Sie sollen eindeutig sein im Gebiete G und im allgemeinen, sowohl im

Innern wie auf der Grenze, sich wie rationale verhalten. Nur in den besonderen Punkten der Grenze, wo zwei Strecken zusammenstoßen, dürfen sie singulär werden, aber sie sollen bestimmte Werte annehmen bei der Annäherung von x an einen solchen singulären Punkt vom Gebiete G aus. Ferner sollen sie zu den ursprünglichen Werten zurückkehren, wenn man von einem Punkte x, der auf einer Randstrecke $K_{-\lambda}$ liegt, durch das Gebiet hindurch zu dem entsprechenden auf K_λ übergeht. Dann bestehen dieselben drei Sätze, die wir aufgestellt haben, und sie werden genau ebenso bewiesen. —

Für den Fall, wo zwei Kreisbogen die Begrenzung von G bilden, die nach dem Gebiete hin den Winkel ω einschließen, läßt sich eine Klassenfunktion sehr leicht bilden:

$$u = z^{\frac{2\pi}{\omega}},$$

und es läßt sich zeigen, daß alle anderen rationale Funktionen von u sind. Diesen Fall lassen wir beiseite, so daß nur der trigonometrische und der elliptische übrig bleibt. Eine Theorie der elliptischen oder auch der trigonometrischen Funktionen auf Grund der Klassendefinition ist nichts Neues. Man wird z. B. mit großem Interesse die schon aus dem Jahre 1851 stammenden Bemerkungen hierüber von *Cauchy, Liouville, Hermite* lesen (C. R. de l'Ac. des sciences, Paris, t. 32, p. 267, 442, 450, 452). Aber ich glaube, daß die Betrachtungen noch zu ergänzen sind, und namentlich, daß die Stellung des *Jacobi*schen Theta in dieser Theorie deutlich zu machen ist. Es handelt sich um Dinge, die zum Teil weitergehen und sich wiederholen bei höheren Funktionen, welche viel später als die elliptischen entdeckt worden sind.

Wir fangen mit dem trigonometrischen Falle an, der scheinbar der leichtere, eigentlich der schwierigere ist. Die Punkte $z_\lambda = z + \lambda$ liegen, in bestimmter Reihenfolge, auf einer geraden Linie, die durch z hindurchgeht und die beiden Grenzen des Parallelstreifens senkrecht durchkreuzt. Daraus folgt: Die Punkte x_λ liegen auf einem durch x hindurchgehenden Kreise, der die beiden Kreise K_1 und K_{-1} in ihrem Berührungspunkte a senkrecht schneidet. Zwischen x_λ und $x_{\lambda+1}$ liegt auf dem Orthogonalkreise kein weiterer kongruenter Punkt. Es ist demnach

$$\Sigma |x_{\lambda+1} - x_\lambda| < \Delta,$$

wo Δ die Peripherie des durch x hindurchgehenden Orthogonalkreises bedeutet. Wir können mehr sagen. Es sei x' ein anderer Punkt des Orthogonalkreises, und zwar zwischen x und x_1 gelegen. Dann liegt allgemein x'_λ zwischen x_λ und $x_{\lambda+1}$; es ist daher

$$|x'_\lambda - x_\lambda| < |x_{\lambda+1} - x_\lambda|,$$

und somit auch

$$\Sigma |x'_\lambda - x_\lambda| < \Delta.$$

Δ ist eine von der Lage des Punktes x abhängige Größe, die entschieden unendlich klein wird bei der Annäherung von x an a innerhalb des Gebietes G. Sie kann auch unendlich groß werden, indem der Kreis in eine gerade Linie übergeht. Die Summen bleiben trotzdem konvergent. Zwei ihrer Glieder können beliebig groß sein; alle übrigen zusammengenommen sind kleiner als der Teil des Geraden, der innerhalb K_1 und K_{-1} fällt.

Hiernach ist $\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda)$ unbedingt konvergent, wenn x' auf demselben Kreise liegt, wie die Punkte x_λ, und zwar zwischen x und x_1. Von diesen beschränkenden Bedingungen können wir vollständig absehen. Nehmen wir statt x, x' irgend zwei Punkte der Ebene, X, X', beliebig, nur von a verschieden, so ist das Verhältnis der Differenz $X_\lambda - X'_\lambda$ zu $x_\lambda - x'_\lambda$ eine rationale Funktion von λ, die offenbar für $\lambda = \infty$ nicht unendlich groß wird. Daraus folgt, daß $\Sigma(X_\lambda - X'_\lambda)$ konvergent ist, wenn $\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda)$ konvergiert. Wir dürfen demnach setzen:

$$\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda) = u - u',$$

wo u eine Funktion der Variabeln x, u' dieselbe von x' ist. Die Funktion u, die durch diese Gleichung bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, existiert in der ganzen Ebene, mit Ausnahme des Punktes a; sie wird unendlich, von der ersten Ordnung, im unendlich fernen Punkte und allen ihm kongruenten.

Wir dürfen die Gleichung nach x differenzieren. Da

$$\frac{dx_\lambda}{(x_\lambda - a)^2} = \frac{dx}{(x-a)^2}$$

ist, so erhalten wir

$$(x-a)^2 \frac{du}{dx} = \Sigma(x_\lambda - a)^2.$$

Diese zweite Funktion bezeichnen wir mit p. p und u haben beide die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man von x zu x_1 übergeht. Bei

p ist dies unmittelbar deutlich; für u gilt es ebenfalls. Denn setzt man für x' den zu x kongruenten Wert x_1, so geht x'_λ in $x_{\lambda+1}$ über, der Ausdruck für $u - u'$ also in die Summe

$$\Sigma(x_\lambda - x_{\lambda+1}).$$

Aber diese Summe ist 0, da x_λ bei zunehmendem und bei abnehmendem λ gegen denselben Wert a konvergiert.

Aus der Konvergenz von $\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda)$ folgt unmittelbar die von

$$\Sigma(R(x_\lambda) - R(x'_\lambda)),$$

wenn $R(x)$ irgendeine rationale Funktion von x ist, die für $x = a$ nicht unendlich wird; denn das Verhältnis von $R(x_\lambda) - R(x'_\lambda)$ zu $x_\lambda - x'_\lambda$ nähert sich mit wachsendem und abnehmendem λ dem Werte $R'(a)$. Man kann die Summe gleich $U - U'$ setzen, wo wieder U nur von x, U' nur von x' abhängt; und U bleibt, ebenso wie u, ungeändert, wenn man x durch x_1 ersetzt. Man kann, vermöge dieses Ausdrucks, Funktionen bilden, die die Invarianteneigenschaft haben, und die in einer Reihe willkürlich gegebener inkongruenter Punkte in vorgeschriebener Weise unendlich werden.

Bedeutet aber $R(x)$ eine rationale Funktion, die für $x = a$ von der zweiten Ordnung oder einer höheren verschwindet, so ist schlechthin

$$V = \Sigma R(x_\lambda)$$

konvergent. Dies folgt aus der Konvergenz von $\Sigma(x_\lambda - a)^2$; denn das Verhältnis von $R(x_\lambda)$ zu $(x_\lambda - a)^2$ hat für $\lambda = +\infty$ und $\lambda = -\infty$ den Grenzwert $\frac{1}{2}R''(a)$.

Man kann aber die U und die V nicht ohne weiteres als Klassenfunktionen bezeichnen. Dazu muß man erst feststellen, was aus ihnen wird, wenn sich x im Gebiete G dem Punkt a nähert. Für die V-Funktionen läßt sich die Frage leicht entscheiden; sie werden unendlich klein bei der Annäherung von x an a.

$x_1 - x$ ist eine rationale Funktion zweiten Grades, die für $x = a$ von der zweiten Ordnung verschwindet. Verstehen wir unter $R(x)$ irgendeine rationale Funktion, die nur innerhalb G unendlich wird, und die gleichfalls für $x = a$ von der zweiten Ordnung verschwindet, oder einer höheren, so wird auch der Quotient $\frac{R(x)}{x_1 - x}$ nur im Innern von G unendlich und nicht an der Grenze. Es läßt sich daher eine Zahl M angeben, die größer ist als jeder Wert, den

$$\left|\frac{R(x)}{x_1 - x}\right|$$

außerhalb G und auf der Grenze von G annimmt. Nehmen wir nun x innerhalb oder auf der Grenze von G an, so liegt jeder von x verschiedene Punkt x_λ außerhalb oder auf der Grenze. Es ist daher, von $\lambda = 0$ abgesehen,

$$|R(x_\lambda)| < M\,|x_{\lambda+1} - x_\lambda|,$$

und da $\Sigma|x_{\lambda+1} - x_\lambda| < \Delta$ ist, so haben wir:

$$|V| < |R(x)| + M \cdot \Delta.$$

Aber sowohl $|R(x)|$ wie Δ werden unendlich klein bei der Annäherung von x an a.

Damit ist bewiesen, daß die V-Funktionen zur Klasse gehören. Wir haben zwar die Voraussetzung gemacht, daß $R(x)$ nur im Innern von G unendlich werden soll; aber wenn man von ihr absieht, bleibt der Beweis im wesentlichen derselbe; man hat nur, statt eines, mehrere Glieder von $\Sigma R(x_\lambda)$ abzusondern.

Nehmen wir jetzt nur an, daß $R(x)$ für $x = a$ nicht unendlich wird. Indem wir die Gleichung

$$U - U' = \Sigma R(x_\lambda) - R(x'_\lambda)$$

differenzieren, erhalten wir:

$$(x-a)^2 \frac{dU}{dx} = \Sigma R'(x_\lambda)\,(x_\lambda - a)^2.$$

Diese aus U abgeleitete ist also eine V-Funktion; sie verschwindet im Punkte a. Es ist ferner:

$$R(x) = R(a) + R'(a)\,(x-a) + \overline{R}(x),$$

wo $\overline{R}(x)$ für $x = a$ von der zweiten Ordnung verschwindet. Demnach konvergiert

$$\overline{V} = \Sigma \overline{R}(x_\lambda)$$

und wird gleich 0 für $x = a$. Man hat aber dann:

$$U - U' = R'(a)(u - u') + \overline{V} - \overline{V}'.$$

Daraus folgt: Jede U-Funktion läßt sich in der Form

$$U = \alpha + \beta u + \overline{V}$$

darstellen; es kommt daher bloß darauf an, zu erkennen, was aus u wird, wenn x sich dem Punkte a nähert.

Ersetzt man in dem Ausdruck für $u - u'$ die Punkte x, x' durch ihre konjugierten, so gehen, wenn man $-\lambda = \mu$ setzt, x_λ und x'_λ in die

konjugierten Punkte zu x_μ und x'_μ über, die Differenz $x_\lambda - x'_\lambda$ also in $x'_\mu - x_\mu$. Daraus folgt, daß $u - u'$ in $u' - u$, u selbst in $C - u$ übergeht, wo C eine Konstante bedeutet. Wir setzen sie gleich 0, so daß direkt $u(y) = -u(x)$ ist. Die Funktion u ist hiermit vollständig definiert; es ist $u = \frac{1}{2}(u(x) - u(y))$, und daher:

$$u = \tfrac{1}{2}\Sigma(x_\lambda - y_\lambda).$$

Wir beschränken x auf die gerade Linie, die durch a hindurchgeht und in a die Kreise K_1 und K_{-1} berührt. Sie wird dargestellt durch die Gleichung

$$x = a + Ait,$$

wo t eine reelle Veränderliche ist. — Denn die entsprechende Linie in der z-Ebene, $z = c - \frac{i}{t}$, ist die durch c gehende Parallele zu den Randlinien des Streifens. Läßt man t abnehmen von einem positiven Werte bis zu 0, so bewegt sich der Punkt z so, daß er die Ordinatenachse zur Rechten hat. Folglich nähert sich in der anderen Ebene der variable Punkt x dem festen a in der Weise, daß K_{-1} zur Rechten, K_1 zur Linken bleibt.

Es ist nun

$$x_\lambda = a + \frac{Ait}{1 + i\lambda t}.$$

y_λ entsteht hieraus, indem man t durch $-t$ ersetzt. Folglich ist:

$$\tfrac{1}{2}(x_\lambda - y_\lambda) = \frac{Ait}{1 + \lambda^2 t^2}$$

und $u = Aif(t)$, wo $f(t)$ die reelle Funktion bedeutet:

$$f(t) = \Sigma \frac{t}{1 + \lambda^2 t^2} = t + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{t}{1 + \lambda^2 t^2}.$$

Wir nehmen t positiv an. Der Wert des von λt bis $(\lambda + 1)t$ erstreckten Integrals

$$\int \frac{dx}{1 + x^2}$$

liegt zwischen

$$\frac{t}{1 + \lambda^2 t^2} \quad \text{und} \quad \frac{t}{1 + (\lambda + 1)^2 t^2}.$$

Die Summe dieser Integrale ist aber gleich $\frac{1}{2}\pi$. Daraus folgt, daß π zwischen $f(t) + t$ und $f(t) - t$, $f(t)$ selbst zwischen $\pi + t$ und $\pi - t$ liegt.

Nehmen wir aber t negativ an: $t = -\tau$, so ist auch $f(t) = -f(\tau)$. Folglich liegt in diesem Falle $f(t)$ zwischen $-\pi + t$ und $-\pi - t$. Daraus

geht weiter hervor, daß im ersten Falle $|u - A\pi i|$, im zweiten $|u + A\pi i|$ kleiner als $|x - a|$ ist.

Nehmen wir jetzt einen Punkt x' an, der seitwärts von der geraden Linie liegt, aber ebenfalls im Gebiete G. Wir ordnen ihm denjenigen Punkt x zu, der auf der Linie selbst liegt und auf demselben Orthogonalkreise wie x'. Der Wertunterschied der Funktion u in beiden Punkten, der durch die Summe $\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda)$ ausgedrückt wird, ist kleiner als die Peripherie des Orthogonalkreises, also kleiner als eine Größe Δ, die selbst bei der Annäherung von x und x' an a unendlich klein wird. Folglich können wir sagen, daß auf jedem Wege, der innerhalb G so zu a führt, daß K_1 zur Linken bleibt, u stetig in $+A\pi i$ übergeht, auf jedem Wege, der von der anderen Seite kommt, in $-A\pi i$.

u selbst hat demnach im Punkte a zwei verschiedene Werte. Aber das widerspricht nicht der Klassendefinition; auch u ist eine Funktion der Klasse.

u wird im Gebiete G nur an der unendlich fernen Stelle unendlich, wie $x - a$. u^2 wird dort von der zweiten, u^3 von der dritten Ordnung unendlich, u. s. f. Denkt man sich irgendeine Klassenfunktion $F(x)$, die im Gebiete G nur an der unendlich fernen Stelle unendlich wird, so kann man sicher eine ganze Funktion von u bilden, die, als abhängig von x betrachtet, genau in derselben Weise unendlich wird wie $F(x)$. Dann muß aber die Differenz beider Größen konstant sein; demnach ist $F(x)$ als ganze Funktion von u darstellbar.

Dazu gehört auch $p = (x-a)^2 \frac{du}{dx}$, und zwar muß dies eine quadratische Funktion von u sein. Aber p wird entschieden 0 im Punkte a, während u dort sowohl gleich $A\pi i$ wie gleich $-A\pi i$ werden kann. Deshalb muß p proportional $u^2 + A\pi^2$ sein und sogar gleich diesem Ausdruck, da, für $x = \infty$, p wie $(x-a)^2$, u wie $x - a$ unendlich wird. Es genügt also u der Differentialgleichung

$$(x-a)^2 \frac{du}{dx} = u^2 + A^2\pi^2.$$

Jetzt läßt sich leicht beweisen: Jede Funktion der Klasse ist eine rationale von u.

Denn es sei ω die Klassenfunktion und α ein Wert, dem sie sich bei der Annäherung von x an a im Gebiete G *nicht* nähert. Dann läßt

sich eine ganze Funktion $L(u)$ aufstellen, die im Gebiete G an allen Stellen, abgesehen von der unendlich fernen, verschwindet, wo $\omega - \alpha$ gleich 0 wird, und mindestens von derselben Ordnung. Der Quotient $\frac{L(u)}{\omega - \alpha}$ ist dann eine Klassenfunktion, die in G nur für $x = \infty$ unendlich groß wird, also ebenso wie $L(u)$ als ganze Funktion von u ausdrückbar. Dann hat man

$$\omega = \alpha + \frac{L(u)}{M(u)}.$$

Daraus folgt weiter: u kann nicht denselben Wert haben in zwei inkongruenten Punkten und auch nicht den Wert $A\pi i$ oder $-A\pi i$ in einem von a verschiedenen Punkte. Denn man kann Klassenfunktionen bilden — also rationale von u — die in dem einen Punkte unendlich werden, in dem anderen nicht.

Ebenso wichtig wie der Summenausdruck ist die Produktdarstellung der trigonometrischen Funktionen. Ein Produkt ist unbedingt konvergent, wenn die Summe der um 1 verminderten Faktoren konvergiert. Demnach ist $\Pi R(x_\lambda)$ unbedingt konvergent, wenn $R(x)$ eine rationale Funktion ist, die für $x = a$ den Wert 1 hat, während $R'(a) = 0$ ist; und wenn $R(x)$ irgendeine rationale Funktion bedeutet, die für $x = a$ nicht unendlich wird, so ist wenigstens das Produkt

$$\Pi\left(\frac{R(x_\lambda)}{R(x'_\lambda)}\right)$$

unbedingt konvergent (außer für $x = a$ oder $x' = a$). Nicht nur der erste, sondern auch der zweite Ausdruck, wenn man in ihm x' als fest annimmt, stellt eine Funktion von x dar, die der Bedingung $F(x_1) = F(x)$ genügt, und, wie leicht zu beweisen ist, eine Klassenfunktion.

Wir nehmen für $R(x)$ einen linearen Ausdruck

$$R(x) = \frac{x - \xi}{x - \eta}.$$

Wir schreiben außerdem y statt x' — wo y nicht den zu x konjugierten, sondern einen willkürlichen Punkt bedeuten soll. Dann ist

$$(x, y; \xi, \eta) = \Pi\left(\frac{x_\lambda - \xi}{x_\lambda - \eta} \cdot \frac{y_\lambda - \eta}{y_\lambda - \xi}\right)$$

eine Form, in der wir nach Belieben alle vier Punkte x, y, ξ, η, oder auch nur den einen, x, als veränderlich betrachten. Sie ist eine Funktion von x, dargestellt als Produkt von unendlich vielen Linearfaktoren,

die im Punkte ξ und allen kongruenten verschwindet, in η und den kongruenten unendlich groß, im Punkte y gleich 1 wird; sie bleibt ungeändert, wenn man x durch x_1 ersetzt.

Jeder Faktor ist ein Doppelverhältnis von vier Punkten. Dies bleibt ungeändert, wenn man die vier Punkte einer und derselben linearen Transformation unterwirft. Nehmen wir einen Faktor, der zu einem negativen λ gehört: $\lambda = -\mu$. Dann gehen $x_\lambda, y_\lambda, \xi, \eta$ durch eine und dieselbe Transformation in x, y, ξ_μ, η_μ über; es ist daher:

$$\frac{x_\lambda - \xi}{x_\lambda - \eta} \cdot \frac{y_\lambda - \eta}{y_\lambda - \xi} = \frac{\xi_\mu - x}{\xi_\mu - y} \cdot \frac{\eta_\mu - y}{\eta_\mu - x}.$$

Hier zeigt sich, daß bei der Vertauschung von x, y mit ξ, η der zu $\lambda = 0$ gehörige Faktor ungeändert bleibt, während die übrigen paarweise ineinander übergehen; es ist also:

$$(x, y; \xi, \eta) = (\xi, \eta; x, y).$$

Nennen wir v, α, β die Werte von u in den Punkten y, ξ, η, so ist:

$$(x, y; \xi, \eta) = \frac{u - \alpha}{u - \beta} \cdot \frac{v - \beta}{v - \alpha}.$$

Denn der Ausdruck rechts stellt eine Funktion von x dar, die genau für dieselben Werte 0 und ∞ wird, wie der linke, und die auch für $x = y$ den Wert 1 hat. Bezeichnet man also den einen mit φ, den andern mit ψ, so ist $\frac{\varphi}{\psi}$ eine in der ganzen Ebene, mit Ausnahme höchstens des Punktes a, reguläre Funktion, die nie Null, nie unendlich, und die für $x = y$ gleich 1 wird. Sie muß einfach eine Konstante, und zwar gleich 1 sein. Denn es ist

$$(x-a)^2 \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi} = \Sigma\left(\frac{1}{x_\lambda - \xi} - \frac{1}{x_\lambda - \eta}\right)(x_\lambda - a)^2,$$

$$(x-a)^2 \frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}\right)(x-a)^2 \frac{du}{dx}.$$

Beides sind Klassenfunktionen, und zwar solche, die im Punkte a verschwinden. Ihre Differenz aber wird nirgends unendlich; folglich ist sie identisch Null. Der Quotient von φ und ψ ist daher konstant und gleich 1.

Der Ausdruck $(x, y; \xi, \eta)$, der nunmehr in den beiden Formen:

$$\frac{x - \xi}{x - \eta} \cdot \frac{y - \eta}{y - \xi} \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{x_\lambda - \xi}{x_\lambda - \eta} \cdot \frac{y_\lambda - \eta}{y_\lambda - \xi}\right) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_\lambda - x}{\xi_\lambda - y} \cdot \frac{\eta_\lambda - y}{\eta_\lambda - x}\right)$$

und

$$\frac{u-\alpha}{u-\beta}\cdot\frac{v-\beta}{v-\alpha}$$

dargestellt werden kann, wird unendlich, wenn man $y=\xi$, oder $\eta=x$ setzt. Aber das Produkt

$$(x, y; \xi, \eta)(x-\eta)(y-\xi)$$

geht für $y=\xi, \eta=x$ in eine bestimmte Funktion von x und ξ über. Einerseits bekommen wir, da für $y=\xi, \eta=x$ die Größe v in α, β in u,

$$\frac{u-\beta}{x-\eta} \text{ in } \frac{du}{dx}, \quad \frac{v-\alpha}{y-\xi} \text{ in } \frac{d\alpha}{d\xi}$$

übergeht:

$$\frac{-(u-\alpha)^2}{\frac{du}{dx}\,\frac{d\alpha}{d\xi}}.$$

Auf der anderen Seite wird ein Faktor gleich $-(x-\xi)^2$, die übrigen werden paarweise einander gleich; es ergibt sich daher:

$$\frac{(u-\alpha)^2}{\frac{du}{dx}\,\frac{d\alpha}{d\xi}} = E^2(x, \xi),$$

wobei $E(x, \xi)$ das Produkt bedeutet:

$$E(x, \xi) = (x-\xi)\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{x_\lambda-\xi}{x_\lambda-x}\cdot\frac{\xi_\lambda-x}{\xi_\lambda-\xi}\right).$$

Alle Faktoren dieses Produkts mit Ausnahme des ersten, werden gleich 1, wenn man x mit ξ zusammenfallen läßt. Es ist daher

$$\frac{E(x, \xi)}{x-\xi} = 1 \text{ für } x=\xi.$$

Wenn wir schreiben

$$\frac{u-\alpha}{\sqrt{\frac{du}{dx}}\sqrt{\frac{d\alpha}{d\xi}}} = E(x, \xi),$$

so ist das Vorzeichen richtig gewählt; denn es wird

$$\frac{u-\alpha}{x-\xi} = \frac{d\alpha}{d\xi} \text{ für } x=\xi.$$

Man sieht unmittelbar, daß sich der Produktausdruck $(x, y; \xi, \eta)$ in folgender Weise durch die E-Funktion ausdrücken läßt:

$$(x, y; \xi, \eta) = \frac{E(x, \xi)\,E(y, \eta)}{E(x, \eta)\,E(y, \xi)}.$$

Wir führen statt $E(x, \xi)$ ein

$$\frac{AE(x, \xi)}{(x-a)(\xi-a)} = S(x, \xi).$$

An die Stelle des ersten Faktors $x-\xi$ tritt dann der folgende:

$$\frac{A(x-\xi)}{(x-a)(\xi-a)} = \frac{A}{\xi-a} - \frac{A}{x-a}.$$

Die eben aufgestellte Formel aber bleibt richtig, wenn wir die E- durch die S-Funktion ersetzen. Da

$$(x-a)\sqrt{\frac{du}{dx}} = \sqrt{u^2 + A^2\pi^2}$$

ist, so haben wir jetzt:

$$\frac{A(u-\alpha)}{\sqrt{u^2 + A^2\pi^2}\,\sqrt{\alpha^2 + A^2\pi^2}} = S(x, \xi).$$

$S(x, \xi)$ ist eine eindeutige Funktion von x, und ihr Quadrat, da es rational durch u ausdrückbar ist, eine Klassenfunktion. Es ist daher $S^2(x_1, \xi) = S^2(x, \xi)$. $S(x_1, \xi)$ selbst aber kann nicht gleich $S(x, \xi)$ sein. Denn sonst wäre $S(x, \xi)$ eine Klassenfunktion. Das ist nicht der Fall, denn es ist nicht rational in u. Folglich ist $S(x_1, \xi) = -S(x, \xi)$.

Die Faktoren von $S(x, \xi)$ sind, mit Ausnahme des ersten, quadratische Funktionen von x. Jeder wird Null für zwei kongruente Werte $x = \xi_\lambda$ und $x = -\xi_\lambda$, unendlich von der zweiten Ordnung für $x = a$, gleich 1 für $x = \xi$. Wenn wir aber den ersten Faktor mit z bezeichnen, so sind die andern quadratische Funktionen von z, die gleich 0 werden für zwei entgegengesetzte Werte λ und $-\lambda$, unendlich für $z = \infty$, und 1 für $z = 0$. Es ist daher

$$S(x, \xi) = z \prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda^2}\right).$$

Als unbedingt konvergentes Produkt von lauter Linearfaktoren läßt sich die Funktion bekanntlich *nicht* darstellen, und es ist wichtig, daß dies unmöglich ist. —

Wir gehen zum elliptischen Falle über. Das Gebiet G umfaßt die ganze Ebene, mit Ausnahme zweier Kreisflächen, die sich nicht berühren. Die beiden Kreise K_1 und K_{-1} können im übrigen beliebig gezeichnet werden, und wenn sie gezeichnet sind, ist es auf unendlich viele Arten möglich, eine lineare Funktion $x_1 = \varphi(x)$ aufzustellen, so beschaffen, daß x_1 den Kreis K_1 durchläuft und das Gebiet G zur Rechten läßt, wenn x den Kreis K_{-1} beschreibt und dabei G zur Linken bleibt. Dann entspricht jedem Punkte x, der außerhalb K_{-1} liegt, speziell jedem Punkte von G, ein Punkt x_1 im Innern von K_1.

Wir definieren wieder die Reihe der kongruenten Punkte x_λ, so daß x_1 mit x identisch ist, und allgemein $x_{\lambda+1} = \varphi(x_\lambda)$. Wenn wir x auf das Gebiet G beschränken, so wird damit x_λ auf ein Gebiet G_λ beschränkt, das ebenfalls durch zwei Kreise begrenzt wird. Nun sind G und G_1 zwei verschiedene Gebiete, die im Kreise K_1 aneinandergrenzen; G_λ und $G_{\lambda+1}$ gehen aus ihnen durch eine und dieselbe lineare Transformation hervor; es sind daher allgemein G_λ und $G_{\lambda+1}$ benachbarte Gebiete. Daraus folgt, daß G_2 an G_1 grenzt, in einem Kreise K_2, der G_2 umschließt und von G_1 umschlossen wird. Ebenso grenzt G_3 an G_2 in einem Kreise K_3, der G_3 umschließt, usf. G_{-1} grenzt an G und wird von K_{-1} umschlossen; dann kommen: G_{-2}, G_{-3} usf. mit den umschließenden Kreisen K_{-2}, K_{-3} usw.

Damit sind zwei Reihen von Kreisen definiert; die eine fängt mit K_1, die andere mit K_{-1} an. Jeder Kreis umschließt den folgenden, und sie werden mit zunehmendem λ unendlich klein. Aber es läßt sich ganz geometrisch mehr erkennen: auch die Summe der Radien ist eine endliche.

Es seien R und r die Radien von K_1 und K_{-1}, e die Entfernung der Mittelpunkte. Dann ist

$$\frac{(e^2 - R^2 - r^2)^2}{4 R^2 r^2} - 1 = \varkappa$$

eine positive Größe, die ungeändert bleibt, wenn man mit der Figur eine lineare Transformation vornimmt. Infolgedessen kehrt die Größe wieder bei jeder einzelnen Figur G_λ. Es sei, bei positivem λ, r_λ der Radius des Kreises, der G_λ umschließt, $r_{\lambda+1}$ der Radius dessen, der von G_λ umschlossen wird, e_λ die Entfernung der Mittelpunkte. Dann ist $r_\lambda^2 + r_{\lambda+1}^2 - e^2$ positiv und gleich $2 r_\lambda r_{\lambda+1} \sqrt{1+\varkappa}$. Es ist aber r_λ^2 größer als $r_{\lambda+1}^2$ und größer als $r_{\lambda+1}^2 - e^2$; folglich $2 r_\lambda^2$ größer als $2 r_\lambda r_{\lambda+1} \sqrt{1+\varkappa}$ und $r_{\lambda+1}$ kleiner als εr_λ, wo ε den echten Bruch $\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}$ bedeutet. Danach ist r_2 kleiner als εr_1, r_3 kleiner als $\varepsilon^2 r_1$, usf., und die ganze Summe der Radien aller Kreise der einen Reihe ist kleiner als

$$r_1 (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots) = \frac{r_1}{1-\varepsilon}.$$

Dasselbe gilt für die andre Reihe.

Da die Radien unendlich klein werden, so existieren nur zwei Punkte der Ebene, die weder dem Gebiete G noch einem der übrigen G_λ angehören; einer a, im Innern von K_1, der andere b, der von K_{-1} umschlossen

wird. Aber dann können auch $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ in keinem Gebiete liegen, sie müssen also mit a, b identisch sein. Nun liegt a außerhalb K_{-1}, folglich $\varphi(a)$ innerhalb K_1. Es ist daher $\varphi(a) = a$, uud ebenso $\varphi(b) = b$.

Dann kann die Beziehung zwischen x und x_1, oder allgemeiner die zwischen x und x_λ, so dargestellt werden:

$$\frac{x_\lambda - a}{x_\lambda - b} = q^\lambda \frac{x - a}{x - b}.$$

Nimmt man x innerhalb G, also x_λ innerhalb G_λ an, so wird $x_\lambda - a$ bei wachsendem λ unendlich klein; es ist daher q dem absoluten Werte nach kleiner als 1.

Es seien x, x' zwei Punkte, die einem und demselben Gebiete angehören. Dann liegen auch x_λ, x'_λ in einem und demselben Teilgebiet, und wenn dies von G verschieden ist, so ist die Entfernung der beiden Punkte, also $|x_\lambda - x'_\lambda|$, kleiner als der Diameter des umschließenden Kreises. Aber die Summe dieser Diameter ist eine endliche; folglich ist $\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda)$ unbedingt konvergent.

Nehmen wir x und x' nicht in demselben, aber in zwei benachbarten Gebieten an, so sei x'' ein Punkt der gemeinsamen Grenze. Dann sind $\Sigma(x_\lambda - x''_\lambda)$ und $\Sigma(x''_\lambda - x'_\lambda)$ konvergent, also auch $\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda)$. Dies läßt sich fortsetzen; die Summe konvergiert unbedingt, wenn x, x' irgend zwei von a, b verschiedene Punkte sind. Wir können schreiben

$$\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda) = u - u',$$

wo u eine Funktion von x allein, u' dieselbe von x' ist.

Differenziert man die Gleichung, so erhält man, da

$$\frac{dx_\lambda}{(x_\lambda - a)(x_\lambda - b)} = \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$$

ist,

$$(x-a)(x-b)\frac{du}{dx} = \Sigma(x_\lambda - a)(x_\lambda - b) = p,$$

$$(x-a)(x-b)\frac{dp}{dx} = \Sigma(x_\lambda - a)(x_\lambda - b)(2x_\lambda - a - b) = P.$$

u wird im unendlich fernen Punkte und den ihm kongruenten von der ersten Ordnung unendlich, p von der zweiten, P von der dritten. p und P sind Klassenfunktionen. Ersetzt man ferner x und x' durch die konjugierten Punkte y, y', so geht p in sich selbst über, P in $-P$ und $u - u'$ in $u' - u$. Denn es ist, für $\lambda = -\mu$,

$$y_\lambda - a = b - x_\mu, \quad y_\lambda - b = a - x_\mu,$$

$$2y_\lambda - a - b = a + b - 2x_\mu.$$

Es geht daher u in $C - u$ über, wo C eine Konstante ist, die man gleich 0 setzen kann.

Aus der Konvergenz des Ausdrucks für $u - u'$ folgt, daß allgemein

$$\Sigma(R(x_\lambda) - R(x'_\lambda))$$

konvergiert, wenn $R(x)$ irgendeine rationale Funktion ist, die für $x = a$ und $x = b$ nicht unendlich wird; und aus der Konvergenz von p folgt ebenso, daß schon

$$\Sigma R(x_\lambda)$$

konvergiert, wenn $R(x)$ für $x = a$ und für $x = b$ verschwindet. Bezeichnen wir den ersten Ausdruck mit $U - U'$, — wo wieder U eine Funktion von x allein, U' dieselbe von x' ist —, den zweiten mit V. V ist eine Klassenfunktion. U dagegen erfährt, falls nicht $R(a) = R(b)$ ist, eine Änderung, wenn man x durch x_1, und damit auch x_λ durch $x_{\lambda+1}$ ersetzt. Diese Änderung wird durch die Summe dargestellt:

$$\Sigma(R(x_{\lambda+1}) - R(x_\lambda));$$

sie ist daher gleich $R(a) - R(b)$. Denn x_λ konvergiert bei wachsendem λ gegen a, bei abnehmendem gegen b. Bei der Funktion u ist $R(x) = x$; wenn man also x durch x_1 ersetzt, geht u in $u + a - b$ über.

Nun ist leicht zu sehen, daß sich in der Form

$$U = \text{Konst.} + \Sigma(R(x_\lambda) - R(x'_\lambda)),$$

wo x' irgendeinen festen Punkt bedeutet, jede Funktion $F(x)$ darstellen läßt, die im Gebiete G, mit Einschluß der Grenze, eindeutig ist, sich wie eine rationale verhält, und die sich höchstens um eine additive Konstante ändert, wenn man von x zu x_1 übergeht. Denn man kann die rationale Funktion $R(x)$ so wählen, daß sie im Innern von G und auf dem einen Grenzkreise sich genau so verhält mit $F(x)$, sonst aber nirgends unendlich wird. Dann ist die Differenz $F(x) - U$ eine Konstante. Andernfalls wäre sie eine Funktion $\omega(x)$, für die $\omega(x_1) - \omega(x)$ konstant ist, die ferner im Innern von G und auf dem einen Kreise nicht unendlich wird — also auch nicht auf dem anderen. Wenn aber $\omega(x_1) - \omega(x)$ konstant ist, so kann man eine Konstante $\varkappa$ so bestimmen, daß

$$e^{\varkappa\,\omega(x)}$$

bei der Vertauschung von x mit x_1 ganz ungeändert bleibt. Dies wäre eine beständig endlich bleibende Klassenfunktion; eine solche aber existiert nicht.

Soll speziell $F(x)$ eine Klassenfunktion sein, so muß $R(a) - R(b) = 0$

sein. Dann kann man $R(a)$ und $R(b)$ gleich 0 annehmen. Man kommt so zu dem Satz:

Jede wirkliche Klassenfunktion ist in der Form

$$\text{Konst.} + \Sigma R(x_\lambda)$$

darstellbar.

Nun bilde man die Reihe:

$$u, p, P, p^2, pP, p^3, p^2P, p^4, \ldots .$$

Das sind Funktionen, die im Gebiete G nur an der unendlich fernen Stelle unendlich werden, von der ersten, zweiten, dritten, vierten Ordnung usw. Aus ihnen kann man linear eine Funktion zusammensetzen, die im unendlich fernen Punkte unendlich wird wie eine willkürlich vorgeschriebene ganze Funktion von x. Daraus folgt, daß jede Funktion U, die in der Grundfläche nur an der unendlich fernen Stelle unendlich wird, sich darstellen läßt in der Form:

$$\alpha u + F(p) + PG(p),$$

wo α eine Konstante, F und G ganze Funktionen von p sind. Soll dies eine Klassenfunktion sein, so muß das erste Glied fortfallen, also α gleich 0 sein. Nun sei $K(x)$ eine beliebige Klassenfunktion. Man kann dann zunächst eine ganze Funktion $H(p)$ bilden, die, als abhängig von x betrachtet, an allen Stellen der Grundfläche verschwindet, wo $K(x)$ gleich 0 ist, abgesehen vom Punkte ∞. Alsdann ist der Quotient von $H(p)$ durch $K(x)$ eine Funktion, die in G nur an der unendlich fernen Stelle unendlich wird, also in der Form $F(p) + PG(p)$ darstellbar. Daraus folgt: Jede Klassenfunktion läßt sich rational durch p und P ausdrücken.

Zu den Klassenfunktionen, die nur im unendlich fernen Punkte und in den ihm kongruenten unendlich werden, gehört auch P^2; es muß daher

$$P^2 = F(p) + G(p) \cdot P$$

sein, und zwar darf hier $F(p)$ nur vom dritten, $G(p)$ nur vom ersten Grade sein. Aber $G(p)$ ist einfach gleich 0. Denn wenn man x durch den konjugierten Punkt ersetzt, so geht p in sich selbst, P aber in $-P$ über. Somit hat man

$$P = \sqrt{R(p)},$$

wo $R(p)$ eine ganze Funktion dritten Grades bedeutet; der Anfangskoeffizient ist 4. Aus den sonstigen Gleichungen zwischen u, p und P folgt:

$$du = \frac{p\,dp}{\sqrt{R(p)}},$$

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{dp}{\sqrt{R(p)}}.$$

Die Gesamtheit der Klassenfunktionen aber fällt zusammen mit der der rationalen von p und $\sqrt{R(p)}$.

Zur Theorie gehört auch hier, daß man neben den Summen die Produkte ins Auge faßt. Die beiden allgemeinen Formen sind:

$$\Pi \frac{R(x_\lambda)}{R(x'_\lambda)} \text{ und } \Pi R(x_\lambda).$$

Die erste konvergiert, wenn $R(x)$ eine beliebige rationale Funktion bedeutet, die für $x = a$ und $x = b$ weder 0 noch ∞ wird, die zweite nur dann, wenn $R(a) = R(b) = 1$ ist.

Die zweite Form stellt unmittelbar Klassenfunktionen dar, und zwar — wenn man noch einen konstanten Faktor hinzufügt — alle. Die erste definiert eigentlich einen Quotienten

$$\frac{F(x)}{F(x')},$$

und es ist

$$\frac{F(x_1)}{F(x)} = \Pi\left(\frac{R(x_{\lambda+1})}{R(x_\lambda)}\right) = \frac{R(a)}{R(b)},$$

so daß $F(x)$ sich im allgemeinen um einen konstanten Faktor ändert, wenn man x durch x_1 ersetzt. Wir beschränken uns wieder auf den Fall, wo $R(x)$ eine lineare Funktion von x ist:

$$R(x) = \frac{x-\xi}{x-\eta}.$$

Wir schreiben y statt x', wo y nicht der zu x konjugierte Punkt zu sein braucht. Wir kommen so wieder zu dem Produktausdruck

$$(x, y;\ \xi, \eta) = \Pi\left(\frac{x_\lambda - \xi}{x_\lambda - \eta} \cdot \frac{y_\lambda - \eta}{y_\lambda - \xi}\right),$$

der, als Funktion von x allein betrachtet, nicht ungeändert bleibt, wenn man x durch x_1 ersetzt, sondern die Gleichung

$$F(x_1) = \frac{\xi - a}{\xi - b} \cdot \frac{\eta - b}{\eta - a} F(x)$$

erfüllt. Der Ausdruck ist deshalb von Interesse, weil sein Logarithmus das elliptische Normalintegral dritter Gattung darstellt, in transzendenter Normierung. Die Funktion $F(x)$, die als Produkt von unendlich vielen

Linearfaktoren gegeben ist, verschwindet für $x = \xi$ und die kongruenten Werte, sie wird unendlich für $x = \eta$ und die kongruenten, gleich 1 für $x = y$.

Nun kann man das Produkt $(x, y; \xi, \eta)$ auf die Form bringen:

$$\frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{y-\eta}{y-\xi} \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{x_\lambda - \xi}{x_\lambda - \eta} \cdot \frac{y_\lambda - \eta}{y_\lambda - \xi} \right) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_\lambda - x}{\xi_\lambda - y} \cdot \frac{\eta_\lambda - y}{\eta_\lambda - x} \right).$$

Daraus geht hervor, daß $(x, y; \xi, \eta)$ ungeändert bleibt, wenn man x, y mit ξ, η vertauscht. Man kann ferner die Funktion von x und ξ aufstellen, in die

$$(x, y; \xi, \eta)(x-\eta)(y-\xi)$$

übergeht, wenn man η mit x, y mit ξ zusammenfallen läßt. Man bekommt dann, da die Faktoren wieder paarweise einander gleich werden: $-E^2(x, \xi)$, wo $E(x, \xi)$ der Produkt ist:

$$E(x, \xi) = (x-\xi) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(x_\lambda - \xi)(\xi_\lambda - x)}{(x_\lambda - x)(\xi_\lambda - \xi)}.$$

Auch dies ist, abgesehen von dem ersten, ein Produkt quadratischer Funktionen von x. Sie sind symmetrisch in bezug auf x und ξ und werden gleich 1, wenn x mit ξ zusammenfällt; es ist daher $E(x, \xi)$ eine alternierende Funktion von x und ξ, die der Bedingung genügt:

$$\frac{E(x, \xi)}{x-\xi} = 1 \text{ für } x = \xi.$$

Es zeigt sich unmittelbar, daß

$$(x, y; \xi, \eta) = \frac{E(x, \xi)\, E(y, \eta)}{E(x, \eta)\, E(y, \xi)}$$

ist. Aber es fragt sich, welche Änderung $E(x, \xi)$ erfährt, wenn man x durch den kongruenten Punkt x_1 ersetzt. Dabei ändert sich $(x, y; \xi, \eta)$ um einen Faktor, der gleichzeitig durch

$$\frac{\xi-a}{\xi-b} \cdot \frac{\eta-b}{\eta-a} \quad \text{und} \quad \frac{E(x_1, \xi)\, E(x, \eta)}{E(x_1, \eta)\, E(x, \xi)}$$

dargestellt wird. Es ist daher

$$\frac{E(x_1, \xi)}{E(x, \xi)} \frac{\xi-b}{\xi-a} = \psi(x)$$

eine von ξ unabhängige Größe. Wir ersetzen in dieser Gleichung ξ durch x_1, x durch ξ und bekommen so:

$$\frac{E(\xi_1, x_1)}{E(\xi, x_1)} \cdot \frac{x_1-b}{x_1-a} = \psi(\xi).$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit der vorigen. Da $E(x, \xi)$ alternierend ist, so folgt:

$$\frac{E(x_1, \xi_1)}{E(x, \xi)} \frac{\xi - b}{\xi - a} \cdot \frac{x_1 - b}{x_1 - a} = \psi(\xi)\, \psi(x).$$

Nun werden

$$\frac{E(x_1, \xi_1)}{x_1 - \xi_1} \text{ und } \frac{E(x, \xi)}{x - \xi}$$

gleich 1 für $x = \xi$, aber:

$$\frac{x_1 - \xi_1}{x - \xi} = \frac{d\xi_1}{d\xi} = \frac{(\xi_1 - a)(\xi_1 - b)}{(\xi - a)(\xi - b)}.$$

Wir erhalten demnach, wenn wir x mit ξ zusammenfallen lassen:

$$\psi^2(\xi) = \left(\frac{\xi_1 - b}{\xi - a}\right)^2.$$

Somit ist:

$$E(x_1, \xi) = \pm \frac{\xi - a}{\xi - b} \cdot \frac{x_1 - b}{x - a} E(x, \xi).$$

Statt $E(x, \xi)$ betrachten wir die Funktion

$$\frac{(a - b)\, E(x, \xi)}{(x - b)(\xi - a)} = S(x, \xi).$$

Für diese gilt die Gleichung:

$$S(x_1, \xi) = \pm \frac{\xi - a}{\xi - b} \cdot \frac{x - b}{x - a} S(x, \xi).$$

Aber $S(x, \xi)$ ist nicht alternierend; es ist:

$$S(\xi, x) = -\frac{\xi - a}{\xi - b} \cdot \frac{x - b}{x - a} S(x, \xi).$$

$S(x, \xi)$ unterscheidet sich von dem Produkt $E(x, \xi)$ dadurch, daß an Stelle von $x - \xi$ der Faktor

$$\frac{(a - b)(x - \xi)}{(x - b)(\xi - a)}$$

getreten ist. Die übrigen Faktoren sind quadratisch; sie verschwinden für je zwei zu ξ kongruente Werte ξ_λ und $\xi_{-\lambda}$, sie werden unendlich für $x = a$ und $x = b$. Demnach ist $S(x, \xi)$ eine in der ganzen Ebene, mit Ausnahme der Punkte a, b reguläre Funktion von x, die nur im Punkte ξ und den kongruenten verschwindet. Das Vorzeichen in der Gleichung zwischen $S(x, \xi)$ und $S(x_1, \xi)$ kann nicht von den besonderen Werten der Veränderlichen und Parameter abhängen. Wir bestimmen es, indem wir q als reell und positiv annehmen und den Punkt x auf den Kreis beschränken, auf dem in diesem Falle die sämtlichen Punkte ξ_λ liegen. Es möge speziell x dem Bogen zwischen ξ und ξ_1 angehören. Der Kreis wird durch die Punkte a, b in zwei Teile geteilt, und die Punkte ξ_λ, also auch x, liegen sämtlich in demselben Teile; denn das Doppelverhältnis

$$\frac{\xi_\lambda - a}{\xi_\lambda - b} \cdot \frac{\xi - b}{\xi - a} = q^\lambda$$

ist positiv. Der Ausdruck $S(x, \xi)$ ist reell, da er sich aus lauter reellen Doppelverhältnissen zusammensetzt. Der Faktor

$$\frac{\xi - a}{\xi - b} \cdot \frac{x - b}{x - a}$$

ist positiv. $S(x_1, \xi)$ muß aber das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie $S(x, \xi)$; denn indem man von x zu x_1 geht, kommt man nur durch einen Nullpunkt von $S(x, \xi)$. Folglich ist

$$S(x_1, \xi) = -\frac{\xi - a}{\xi - b} \cdot \frac{x - b}{x - a} S(x, \xi).$$

Führen wir an Stelle von x die Größe

$$\frac{x - a}{x - b} \cdot \frac{\xi - b}{\xi - a} = z$$

als Veränderliche ein und setzen $S(x, \xi) = f(z)$, so ist, da z in qz übergeht, wenn man x durch x_1 ersetzt:

$$f(qz) = -\frac{f(z)}{z}.$$

Dieses $f(z)$ wird nur singulär für $z = 0$ und $z = \infty$; es läßt sich daher in eine Reihe nach ganzen Potenzen von z entwickeln: $f(z) = \Sigma(C_\lambda z^\lambda)$. Aus der Gleichung, der $f(z)$ genügt, folgt aber:

$$C_{\lambda+1} = -C_\lambda q^\lambda,$$

$$C_\lambda = (-1)^\lambda q^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} C_0.$$

Demnach ist $f(z) = S(x, \xi)$ bis auf einen konstanten Faktor mit der Funktion

$$\Theta(z) = \Sigma(-1)^\lambda q^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} z^\lambda$$

identisch. Aber es ist, wie aus dem Produktausdruck hervorgeht,

$$\frac{f(z)}{z-1} = 1 \text{ für } z = 1,$$

also $f'(1) = 0$. Folglich ist:

$$S(x, \xi) = \frac{\Theta(z)}{\Theta'(1)}.$$

In den „Fortschritten der Mathematik“, Bd. 41, S. 517, wird gesagt, daß eine „an sich unwahrscheinliche Vermutung“ von mir durch eine

Mitteilung *Pryms* „direkt widerlegt" werde*). — Wir dürfen im allgemeinen denen, die es übernehmen, über unsre Arbeiten zu berichten, ihr Amt nicht dadurch erschweren, daß wir unsererseits ihre Ausführungen einer Kritik unterziehen. Der vorliegende Fall bildet eine Ausnahme; wenn der Äußerung nicht widersprochen wird, kann sich die Vorstellung festsetzen, daß zwischen *Prym* und mir — also zwischen zwei Mathematikern, die beide *Riemann* verehren — in bezug auf *Riemann* eine Meinungsverschiedenheit besteht, die sich nicht heben läßt. Die angefochtene Stelle lautet (dieses Journal, Bd. 139, S. 14—15):

„Aber nichts und gar nichts deutet darauf hin, daß *Prym* und *Riemann* hierbei an andere als hyperelliptische ϑ gedacht haben."

Ich spreche dabei von der Arbeit, die *Prym* 1866 in Zürich veröffentlicht hat. Was ich sage, ist gar keine Vermutung, sondern eine leicht erkennbare Tatsache, die *Prym* gewiß bereitwillig zugeben wird.

Was *Prym* an der Stelle, auf die der Referent mich hinweist, über *Riemann* sagt, kann man als mehr oder weniger wichtig betrachten, mich selbst geht es nichts an. Denn ich bin der Ansicht, daß irgendein wichtiger allgemeiner Satz demjenigen vollständig und ungeteilt bleibt, der ihn gefunden und ohne Zögern in klarer Fassung den Fachgenossen vorgelegt hat, auch wenn es sich herausstellt, daß andere vor ihm denselben Gedanken hatten, ohne ihn zu veröffentlichen.

---

*) *Prym*, Untersuchungen über die *Riemann*sche Thetaformel und die *Riemann*sche Charakteristikentheorie (Leipzig 1882), Vorwort S. VII. Die Notiz fängt an mit den irrtümlichen Worten: „Wie ich schon in meiner im Jahre 1866 erschienenen Arbeit „Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche" mitgeteilt habe."

Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist.

(Zweite Mitteilung.)

Von Herrn *Oskar Perron* in Tübingen.

Einleitung. In meiner ersten Mitteilung*) habe ich mich mit der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\, y = 0$$

und allgemeiner mit dem System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y_\lambda' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x)\, y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

beschäftigt, wobei die Koeffizienten $f_\lambda(x)$ bzw. $f_{\lambda,\mu}(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig waren und mit wachsendem x gewissen endlichen Grenzwerten

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda, \qquad \lim_{x=\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = a_{\lambda,\mu}$$

zustrebten. Es zeigte sich, daß das Verhalten der Integrale im Unendlichen abhängt von den Wurzeln der „charakteristischen Gleichung"

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

bzw.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \varrho & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \varrho & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Damals habe ich vorausgesetzt, daß die reellen Teile der Wurzeln dieser Gleichung alle voneinander verschieden sind, und daneben an einem

*) Bd. 142 dieses Journals.

Beispiel gezeigt, daß ohne diese Voraussetzung die erlangten Resultate nicht mehr durchweg Geltung behalten. In der gegenwärtigen Arbeit soll nun der allgemeine Fall weiter untersucht werden. Von meiner ersten Mitteilung brauche ich dabei nichts weiter vorauszusetzen als das Existenztheorem und das Eindeutigkeitstheorem, die ich beide auch damals nicht bewiesen, sondern als bekannt angenommen habe.

Erster Abschnitt.

Systeme von n Gleichungen erster Ordnung.

§ 1.

Die Koeffizienten des Systems von n Differentialgleichungen

$$(1.) \qquad y_\lambda' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x)\, y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

mögen für $x \geqq x_0$ stetig sein; ferner mögen die endlichen Grenzwerte

$$(2.) \qquad \lim_{x=\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = a_{\lambda,\mu}$$

existieren. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\varrho & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

seien $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$; sie brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein. Dann gilt

Satz 1. *Sind r, s irgend zwei reelle Zahlen, die den Ungleichungen*)*

$$r > \Re(\varrho_\lambda) > s \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

genügen, so gelten für jedes nicht identisch verschwindende Integralsystem von (1.) *die Beziehungen:*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\lambda}{e^{rx}} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|}{e^{sx}} = \infty.$$

Beweis. Indem wir mit F, A die Matrizen

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} \cdots f_{1,n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ f_{n,1} \cdots f_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdots a_{1,n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n,1} \cdots a_{n,n} \end{pmatrix}$$

bezeichnen, können wir die Gleichungen (1.), (2.) symbolisch folgendermaßen schreiben:

---

*) Mit $\Re$ wird hier wie stets im folgenden der reelle Teil bezeichnet.

$$(1^{a}.) \qquad (y_1', \dots y_n') = F(y_1, \dots y_n),$$

$$(2^{a}.) \qquad \lim_{x=\infty} F = A.$$

Bekanntlich gibt es eine Matrix B, durch welche die Matrix A in folgende Form transformiert wird:

$$(3.) \qquad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \varrho_1 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & \varrho_2 & \cdots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \varrho_n \end{pmatrix},$$

wo die $c_{\lambda,\mu}$ gewisse Konstanten sind, auf deren Werte es nicht ankommt. Wegen $(2^{a}.)$ wird also

$$(4.) \qquad B^{-1}FB = \begin{pmatrix} \varrho_1 + \varphi_{1,1}(x) & c_{1,2} + \varphi_{1,2}(x) & \cdots & c_{1,n} + \varphi_{1,n}(x) \\ \varphi_{2,1}(x) & \varrho_2 + \varphi_{2,2}(x) & \cdots & c_{2,n} + \varphi_{2,n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{n,1}(x) & \varphi_{n,2}(x) & \cdots & \varrho_n + \varphi_{n,n}(x) \end{pmatrix},$$

wobei die $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig sind und

$$(5.) \qquad \lim_{x=\infty} \varphi_{\lambda,\mu}(x) = 0 \qquad (\lambda,\mu = 1, 2, \dots n)$$

ist. Macht man dann die Substitution

$$(6.) \qquad (y_1, \dots y_n) = B(z_1, \dots z_n),$$

so transformiert sich $(1^{a}.)$ in

$$(z_1', \dots z_n') = B^{-1}FB(z_1, \dots z_n),$$

oder in unsymbolischer Form:

$$(7.) \qquad z_\lambda' = \varrho_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu=\lambda+1}^{n} c_{\lambda,\mu} z_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu} z_\mu. \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

Nach den Voraussetzungen von Satz 1 wird es eine Zahl r' geben, welche den Ungleichungen

$$(8.) \qquad r > r' > \Re(\varrho_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

genügt. Setzt man dann

$$(9.) \qquad \operatorname*{Max}_{\lambda,\mu} |c_{\lambda,\mu}| = c,$$

so kann man eine Zahl α zwischen 0 und 1 angeben derart, daß auch

$$(10.) \qquad r' > \Re(\varrho_\lambda) + cn\alpha \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

ist. Bedeutet nun $y_1, y_2, \dots y_n$ irgendein Integralsystem von (1.), ferner $z_1, z_2, \dots z_n$ das vermöge (6.) transformierte System, so kann man zu einem beliebigen Wert $x_1 (> x_0)$ eine Zahl C angeben derart, daß die Ungleichungen

$$(11.) \qquad |z_\lambda| < C\alpha^\lambda e^{r'x} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

wenigstens für die Stelle $x = x_1$ gelten. Dann behaupten wir, daß sie

auch für $x > x_1$ dauernd bestehen bleiben, sofern nur x_1 von vornherein genügend groß gewählt wurde. Denn nehmen wir an, das wäre nicht der Fall, so sei x_2 die untere Grenze derjenigen $x (> x_1)$ für welche (11.) nicht gilt. An der Stelle $x = x_2$ ist dann für einen gewissen Index k:

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{l} |z_k| = C\alpha^k e^{r'x}, \\ |z_\lambda| \leqq C\alpha^\lambda e^{r'x}, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_k|^2 \geqq \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(C\alpha^k e^{r'x})^2 = C^2\alpha^{2k} r' e^{2r'x} \end{array}\right\} \text{(für } x = x_2\text{)}.$$

Nun folgt aber, wenn $\bar{z}_k$ die zu z_k konjugiert komplexe Größe bezeichnet, aus (7.), indem man speziell $\lambda = k$ setzt, dann mit $\bar{z}_k$ multipliziert und den reellen Teil nimmt:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_k|^2 = \Re(\bar{z}_k z_k') = \Re(\varrho_k)|z_k|^2 + \sum_{\mu=k+1}^{n} \Re(c_{k,\mu} z_\mu \bar{z}_k) + \sum_{\mu=1}^{n} \Re(\varphi_{k,\mu} z_\mu \bar{z}_k).$$

Also ist gewiß auch mit Rücksicht auf (9.)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_k|^2 - \Re(\varrho_k)|z_k|^2 \leqq c \sum_{\mu=k+1}^{n} |z_\mu z_k| + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu} z_\mu z_k|,$$

und daher für $x = x_2$ wegen (12.) a fortiori

$$C^2\alpha^{2k} r' e^{2r'x} - \Re(\varrho_k) C^2\alpha^{2k} e^{2r'x} \leqq c \sum_{\mu=k+1}^{n} C^2\alpha^{\mu+k} e^{2r'x} + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}| C^2\alpha^{\mu+k} e^{2r'x}.$$

Oder nach Division durch $C^2\alpha^{2k} e^{2r'x}$, und weil $\alpha < 1$ sein sollte:

$$r' - \Re(\varrho_k) \leqq cn\alpha + \frac{1}{\alpha^k} \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}|.$$

Diese Ungleichung gilt für $x = x_2$. Aber wenn x_1 genügend groß gewählt wurde, so wird die rechtsstehende Summe, da $x_2 > x_1$ ist, wegen (5.) beliebig klein, so daß die Ungleichung im Widerspruch mit (10.) steht. Daher ist die Ungleichung (11.) in der Tat für $x > x_1$ dauernd erfüllt, und wegen $r > r'$ folgt aus ihr sogleich:

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\lambda}{e^{rx}} = 0.$$

Da aber die y_λ sich vermöge (6.) linear aus den z_λ zusammensetzen, so wird auch

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\lambda}{e^{rx}} = 0,$$

womit die erste Hälfte von Satz 1 bewiesen ist.

Um die zweite zu beweisen, betrachten wir das zu (1.) „adjungierte System“:

$$(13.)\quad Y_\lambda' = -\sum_{\mu=1}^{n} f_{\mu,\lambda}(x) Y_\mu. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Dann ist

$$\frac{d}{dx}\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda Y_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda Y'_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{n} y'_\lambda Y_\lambda = -\sum_{\lambda,\mu} y_\lambda f_{\mu,\lambda} Y_\mu + \sum_{\lambda,\mu} Y_\lambda f_{\lambda,\mu} y_\mu = 0.$$

Bedeutet also $y_1, y_2, \dots y_n$ irgendein Integralsystem von (1.) (aber nicht das triviale $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$), so hat jedes Integralsystem von (13.) die Eigenschaft, daß $\Sigma y_\lambda Y_\lambda$ eine Konstante ist. Dabei kann man die Y_λ so wählen, daß diese Konstante nicht verschwindet. Denn wäre sie stets gleich Null, so hätte man, wenn

$$Y_1 = Y_{1,\mu}, \quad Y_2 = Y_{2,\mu}, \dots Y_n = Y_{n,\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

n linear unabhängige Integralsysteme von (13.) sind,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda Y_{\lambda,1} = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda Y_{\lambda,2} = 0, \dots \quad \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda Y_{\lambda,n} = 0.$$

Daher müßte die Determinante $|Y_{\lambda,\mu}|$ verschwinden, was nicht möglich ist, da die $Y_{\lambda,\mu}$ linear unabhängig sind. Man kann infolgedessen die Y_λ so wählen, daß

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda Y_\lambda = 1 \tag{14.}$$

ist. Wendet man nun den bereits bewiesenen Teil von Satz 1 auf das System (13.) an, dessen charakteristische Gleichung offenbar die Wurzeln $-\varrho_1, -\varrho_2, \dots -\varrho_n$ hat, so kommt, weil $s < \Re(\varrho_\lambda)$, also $-s > \Re(-\varrho_\lambda)$ ist,

$$\lim_{x=\infty} \frac{Y_\lambda}{e^{-sx}} = 0. \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

Daher gelten, wie klein auch die positive Zahl ε sei, für genügend große x die Ungleichungen

$$|Y_\lambda| < \varepsilon e^{-sx}. \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

Also ist nach (14.)

$$1 \leqq \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda Y_\lambda| < \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda| \varepsilon e^{-sx},$$

oder:

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda|}{e^{sx}} > \frac{1}{\varepsilon},$$

womit auch die zweite Hälfte von Satz 1 bewiesen ist.

§ 2.

Wir beschäftigen uns weiter mit dem speziellen System von Differentialgleichungen

$$z'_\lambda = \varrho_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu=\lambda+1}^{n} c_{\lambda,\mu} z_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x) z_\mu, \tag{15.}$$

wobei die Funktionen $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig sind und für $\lim x = \infty$ dem Grenzwert Null zustreben. Auf ein solches System wurden wir im vorigen Paragraphen durch eine Transformation geführt. Zunächst beweisen wir

Satz 2. *Falls* $\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_\lambda)$ *ist für* $\lambda = 2, 3, \ldots n$, *so hat das System* (15.) *eine Lösung, für welche*

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\lambda}{z_1} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

ist. Es gibt sogar n linear unabhängige Integralsysteme dieser Art.

Wir setzen zu dem Zweck wieder

$$\text{(16.)} \qquad \operatorname*{Max}_{\lambda,\mu} |c_{\lambda,\mu}| = c$$

und wählen eine positive Zahl α kleiner als 1, für welche

$$\text{(17.)} \qquad \Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_\lambda) + 2cn\alpha \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

ist. Dann sei $z_1, z_2, \ldots z_n$ irgendein Integralsystem von (15.), welches an einer bestimmten Stelle $x = x_1$, deren geeignete Wahl wir uns noch vorbehalten, den Ungleichungen genügt:

$$\text{(18.)} \qquad |z_\lambda(x_1)| < \alpha^{\lambda-1} |z_1(x_1)|. \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

Alsdann werden wir zeigen, daß, wenn nur x_1 genügend groß gewählt wurde, *jedem solchen Integralsystem die in Satz* 2 *angegebene Eigenschaft zukommt.* Daß es n linear unabhängige Integralsysteme dieser Art gibt, ist dann evident, da man ja nach dem Existenztheorem $z_1(x_1), z_2(x_1), \ldots z_n(x_1)$ beliebig vorgeben und den Forderungen (18.) offenbar auf n unabhängige Arten Genüge leisten kann.

Zunächst können wir beweisen, daß für $x \geqq x_1$ die Ungleichungen bestehen:

$$\text{(19.)} \qquad |z_\lambda| < \alpha^{\lambda-1} |z_1|. \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

Nach der Forderung (18.) sind diese nämlich für $x = x_1$ jedenfalls richtig. Nehmen wir aber an, sie wären für $x > x_1$ nicht immer richtig, so sei x_2 die untere Grenze derjenigen $x (> x_1)$ für welche (19.) nicht gilt. Dann ist für einen gewissen Index $k (\geqq 2)$:

$$\text{(20.)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} |z_k| = \alpha^{k-1} |z_1| \\ |z_\lambda| \leqq \alpha^{\lambda-1} |z_1| \quad \text{für } \lambda \neq k \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |z_k|^2 \geqq \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\alpha^{2k-2} |z_1|^2) \end{array} \right\} \text{(für } x = x_2\text{)}.$$

Dabei ist sicher $z_1(x_2) \neq 0$; denn andernfalls wäre erst recht auch $z_\lambda(x_2) = 0$

für $\lambda = 2, 3, \ldots n$, so daß nach dem Eindeutigkeitstheorem die z_λ überall verschwinden müßten, während nach (18.) doch $z_1(x_1) \neq 0$ ist.

Nun ergibt sich aus (15.) für $\lambda = 1$, indem man mit $\bar{z}_1$ multipliziert und dann den reellen Teil nimmt,

$$(21.)\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_1|^2 - \Re(\varrho_1)|z_1|^2 = \sum_{\mu=2}^{n} \Re(c_{1,\mu} z_\mu \bar{z}_1) + \sum_{\mu=1}^{n} \Re(\varphi_{1,\mu} z_\mu \bar{z}_1) \\ \qquad\qquad \geqq -c \sum_{\mu=2}^{n} |z_\mu z_1| - \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1,\mu} z_\mu z_1| . \end{cases}$$

Also speziell für $x = x_2$ wegen (20.)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_1|^2 - \Re(\varrho_1)|z_1|^2 \geqq -c \sum_{\mu=2}^{n} \alpha^{\mu-1}|z_1|^2 - \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1,\mu}|\alpha^{\mu-1}|z_1|^2,$$

oder erst recht, weil $\alpha < 1$ ist:

$$(A.) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_1|^2 - \Re(\varrho_1)|z_1|^2 \geqq -cn\alpha|z_1|^2 - |z_1|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1,\mu}| .$$

Ähnlich ergibt sich aus (15.) für $\lambda = k$:

$$(22.)\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_k|^2 - \Re(\varrho_k)|z_k|^2 = \sum_{\mu=k+1}^{n} \Re(c_{k,\mu} z_\mu \bar{z}_k) + \sum_{\mu=1}^{n} \Re(\varphi_{k,\mu} z_\mu \bar{z}_k) \\ \qquad\qquad \leqq c \sum_{\mu=k+1}^{n} |z_\mu z_k| + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu} z_\mu z_k| . \end{cases}$$

Also speziell für $x = x_2$ mit Rücksicht auf (20.):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\alpha^{2k-2}|z_1|^2) - \Re(\varrho_k)\alpha^{2k-2}|z_1|^2 \leqq c \sum_{\mu=k+1}^{n} \alpha^{\mu+k-2}|z_1|^2 + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}|\alpha^{\mu+k-2}|z_1|^2$$
$$\leqq cn\alpha^{2k-1}|z_1|^2 + \alpha^{k-2}|z_1|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}| ;$$

oder nach Division durch α^{2k-2}:

$$(B.) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_1|^2 - \Re(\varrho_k)|z_1|^2 \leqq cn\alpha|z_1|^2 + \alpha^{-k}|z_1|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}| .$$

Vergleicht man dies mit (A.), so ergibt sich nach Division durch $|z_1|^2$:

$$\Re(\varrho_1) - \Re(\varrho_k) \leqq 2cn\alpha + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1,\mu}| + \alpha^{-k} \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}| .$$

Dies gilt für $x = x_2$ und steht daher wegen $x_2 > x_1$, wenn nur x_1 genügend groß gewählt wurde, im Widerspruch mit (17.). Damit ist die Ungleichung (19.) für $x > x_1$ nachgewiesen.

Wir setzen nun

$$(23.) \qquad \limsup_{x=\infty} \left|\frac{z_\lambda}{z_1}\right| = \beta_\lambda \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

und außerdem

$$(24.) \qquad \mathrm{Max}\,(\beta_2, \sqrt{\beta_3}, \sqrt[3]{\beta_4}, \ldots \sqrt[n-1]{\beta_n}) = \beta .$$

Dann wird Satz 2 bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß $\beta = 0$ ist. Wegen (19.) ist jedenfalls $\beta_\lambda \leqq \alpha^{\lambda-1}$, also

$$\beta \leqq \alpha < 1. \tag{25.}$$

Wäre nun $\beta > 0$, so würde es einen Index $k(>1)$ geben, für welchen

$$\beta = \sqrt[k-1]{\beta_k} \geqq \sqrt[\lambda-1]{\beta_\lambda} \quad \text{für } \lambda \neq k,$$

ist, und man hätte speziell

$$\limsup_{x=\infty} \left| \frac{z_k}{z_1} \right| = \beta^{k-1} > 0.$$

Daher würde es nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε noch beliebig große x geben, für welche

$$\left| \frac{z_k}{z_1} \right| > (\beta - \varepsilon)^{k-1}, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left| \frac{z_k}{z_1} \right|^2 > -\varepsilon \tag{26.}$$

wäre (siehe den einfachen Beweis bei den analogen Ungleichungen (10.) meiner ersten Mitteilung). Außerdem ist für alle hinreichend großen x:

$$\left| \frac{z_\lambda}{z_1} \right| < (\beta + \varepsilon)^{\lambda-1} < 1, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n) \tag{27.}$$

indem man ε ja kleiner als $1 - \beta$ denken kann.

Nun ist nach (21.)

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} |z_1|^2 \leqq -\Re(\varrho_1) |z_1|^2 + c \sum_{\mu=2}^{n} |z_\mu z_1| + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1,\mu} z_\mu z_1|,$$

also wegen (27.) für hinreichend große x:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} |z_1|^2 \leqq -\Re(\varrho_1) |z_1|^2 + cn(\beta + \varepsilon) |z_1|^2 + |z_1|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1,\mu}|.$$

Ähnlich ist nach (22.) für hinreichend große x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |z_k|^2 &\leqq \Re(\varrho_k) |z_k|^2 + c \sum_{\mu=k+1}^{n} |z_\mu z_k| + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu} z_\mu z_k| \\ &\leqq \Re(\varrho_k) |z_k|^2 + cn(\beta + \varepsilon)^{2k-1} |z_1|^2 + |z_1|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}|. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt nun:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left| \frac{z_k}{z_1} \right|^2 &= -\frac{|z_k|^2}{|z_1|^4} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |z_1|^2 + \frac{1}{|z_1|^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |z_k|^2 \\ &\leqq -\Re(\varrho_1) \left| \frac{z_k}{z_1} \right|^2 + cn(\beta + \varepsilon) \left| \frac{z_k}{z_1} \right|^2 + \left| \frac{z_k}{z_1} \right|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1,\mu}| \\ &\quad + \Re(\varrho_k) \left| \frac{z_k}{z_1} \right|^2 + cn(\beta + \varepsilon)^{2k-1} + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k,\mu}| \\ &\leqq -\Re(\varrho_1 - \varrho_k) \left| \frac{z_k}{z_1} \right|^2 + 2cn(\beta + \varepsilon)^{2k-1} + \sum_{\mu=1}^{n} (|\varphi_{1,\mu}| + |\varphi_{k,\mu}|). \end{aligned}$$

Also, weil $\Re(\varrho_1 - \varrho_k)$ positiv ist, wegen (26.) für gewisse Werte von x, unter denen auch beliebig große sind

$$-\varepsilon < -\Re(\varrho_1 - \varrho_k) \cdot (\beta - \varepsilon)^{2k-2} + 2cn(\beta + \varepsilon)^{2k-1} + \sum_{\mu=1}^{n} (|\varphi_{1,\mu}| + |\varphi_{k,\mu}|).$$

Ist x genügend groß, so wird auch die Summe kleiner als ε, so daß man erhält:

$$-\varepsilon < -\Re(\varrho_1 - \varrho_k) \cdot (\beta - \varepsilon)^{2k-2} + 2cn(\beta + \varepsilon)^{2k-1} + \varepsilon,$$

oder einfacher:

$$\Re(\varrho_1) < \Re(\varrho_k) + \frac{2\varepsilon}{(\beta - \varepsilon)^{2k-2}} + 2cn(\beta + \varepsilon)\left(\frac{\beta + \varepsilon}{\beta - \varepsilon}\right)^{2k-2}.$$

Da dies für jede noch so kleine positive Zahl ε gilt, so ergibt sich, indem man zur Grenze $\lim \varepsilon = 0$ übergeht,

$$\Re(\varrho_1) \leqq \Re(\varrho_k) + 2cn\beta,$$

was aber wegen $\beta \leqq \alpha$ mit (17.) im Widerspruch steht.

Die Annahme $\beta > 0$ führt hiernach zu einem Widerspruch; es muß $\beta = 0$ sein, und damit ist Satz 2 bewiesen.

§ 3.

Der Satz 2 läßt folgende Verallgemeinerung zu:

Satz 3. *Wenn jede der Zahlen* $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_k$ *einen größeren reellen Teil hat als jede der übrigen* ϱ_l, *so hat das Gleichungssystem* (15.) k *linear unabhängige Integralsysteme*

$$z_1 = z_{1,\nu}, \quad z_2 = z_{2,\nu}, \dots \quad z_n = z_{n,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots k)$$

derart, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} & \cdots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{k,1} & z_{k,2} & \cdots & z_{k,k} \end{vmatrix}} = 0$$

ist für jede von $(1, 2, \dots k)$ *verschiedene Kombination* $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k)$ *der Indizes* $1, 2, \dots n$.

Der Spezialfall $k = 1$ läuft auf Satz 2 hinaus. Um Satz 3 allgemein zu beweisen, schreiben wir in jeder Kombination $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k)$ die Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge (also $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$); sodann ordnen wir die $\binom{n}{k}$ Kombinationen in der üblichen Weise, das heißt so, daß $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k)$ früher als $(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k)$ kommt, wenn

entweder $\lambda_1 < \mu_1$
oder $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 < \mu_2$
oder . . . . . .
oder endlich $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}, \lambda_k < \mu_k$

ist. Das gibt gerade eine ganz bestimmte Anordnung der sämtlichen Kombinationen. Nach dem gleichen Gesetz ordnen wir die Determinanten

$$\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} & \cdots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}$$

und bezeichnen sie in dieser Reihenfolge mit

$$v_1, v_2, \ldots v_m,$$

wobei $m = \binom{n}{k}$ ist. Insbesondere ist also

$$v_1 = \begin{vmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{k,1} & z_{k,2} & \cdots & z_{k,k} \end{vmatrix},$$

und wir haben nur zu zeigen, daß es solche Integrale $z_{\lambda,\mu}$ gibt, für welche

$$\lim_{x=\infty} \frac{v_\lambda}{v_1} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots m)$$

ist. Zu dem Zweck ordnen wir auch die $\binom{n}{k}$ Zahlen

$$\varrho_{\lambda_1} + \varrho_{\lambda_2} + \cdots + \varrho_{\lambda_k}$$

nach dem gleichen Gesetz und bezeichnen sie in dieser Reihenfolge mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$. Insbesondere ist

(28.) $$\sigma_1 = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k,$$

und aus den Voraussetzungen von Satz 3 folgt:

(29.) $$\sigma_1 > \sigma_\lambda. \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots m)$$

Ist nun etwa

(30.) $$\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} & \cdots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix} = v_\lambda,$$

also auch

(31.) $$\varrho_{\lambda_1} + \varrho_{\lambda_2} + \cdots + \varrho_{\lambda_k} = \sigma_\lambda,$$

so folgt durch Differentiation von (30.):

(32.) $$v'_\lambda = \begin{vmatrix} z'_{\lambda_1,1} & \cdots & z'_{\lambda_1,k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{\lambda_k,1} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & \cdots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ z'_{\lambda_k,1} & \cdots & z'_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}.$$

Da aber die z Integrale von (15.) sind, so lassen sich ihre Ableitungen in (32.) vermittels (15.) ausdrücken, und man erhält, wenn zur Abkürzung von jeder Determinante nur die erste Kolonne geschrieben wird:

$$v_\lambda' = \begin{vmatrix} \varrho_{\lambda_1} z_{\lambda_1,1} + \sum_{\mu=\lambda_1+1}^{n} c_{\lambda_1,\mu} z_{\mu,1} + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda_1,\mu} z_{\mu,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{\lambda_k,1} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho_{\lambda_k} z_{\lambda_k,1} + \sum_{\mu=\lambda_k+1}^{n} c_{\lambda_k,\mu} z_{\mu,1} + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda_k,\mu} z_{\mu,1} \end{vmatrix}$$

$$= \varrho_{\lambda_1} \begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & \cdots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix} + \sum_{\mu=\lambda_1+1}^{n} c_{\lambda_1,\mu} \begin{vmatrix} z_{\mu,1} & \cdots & z_{\mu,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix} + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda_1,\mu} \begin{vmatrix} z_{\mu,1} & \cdots & z_{\mu,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\

ist. Und zwar gibt es nach dem für Satz 2 gegebenen Beweis eine positive Zahl α und eine Zahl x_1 derart, daß die Ungleichungen

$$|v_\lambda(x_1)| < \alpha^{\lambda-1}|v_1(x_1)| \qquad (\lambda=2,3,\dots m) \tag{36.}$$

allemal die Relationen (35.) nach sich ziehen (vgl. Formel (18.)).

Nun kann man aber leicht k linear unabhängige Integralsysteme von (15.) angeben, für welche die Bedingungen (36.) erfüllt sind. Denn nach dem Existenztheorem kann man ja die $z_{\lambda,\mu}$ $(\lambda = 1, 2, \dots n;\ \mu = 1, 2, \dots k)$ an der Stelle x_1 willkürlich vorschreiben. Wählt man sie beispielsweise so, daß

$$v_1(x_1) = \begin{vmatrix} z_{1,1}(x_1) & \cdots & z_{1,k}(x_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{k,1}(x_1) & \cdots & z_{k,k}(x_1) \end{vmatrix} = 1,$$

$$z_{\lambda,1}(x_1) = 0,\ z_{\lambda,2}(x_1) = 0, \dots,\ z_{\lambda,k}(x_1) = 0 \qquad \text{für } \lambda > k$$

ist, so wird $v_\lambda(x_1) = 0$ für $\lambda > 1$, und die Ungleichungen (36.) sind gewiß erfüllt. Dann bestehen aber auch die Gleichungen (35.), und Satz 3 ist bewiesen.

Zweiter Abschnitt.

Anwendung auf die Gleichungen n-ter Ordnung.

§ 4.

Wir untersuchen jetzt eine einzelne Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + f_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\,y = 0. \tag{37.}$$

Dabei sollen die Koeffizienten $f_\lambda(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig sein und mit wachsendem x den endlichen Grenzwerten

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda \qquad (\lambda=1,2,\dots n) \tag{38.}$$

zustreben. Die Gleichung (37.) läßt sich auf unendlich viele Arten in ein System von n Gleichungen erster Ordnung transformieren. Am einfachsten ist es, wenn man

$$y = y_1,\ y' = y_2, \dots\ y^{(n-1)} = y_n$$

setzt; dadurch geht (37.) über in das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\cdots\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= -f_n(x)\,y_1 - f_{n-1}(x)\,y_2 - \cdots - f_1(x)\,y_n. \end{aligned}$$

Dieses ist von der in § 1 behandelten Form (1.), und die charakteristische Gleichung lautet:

(39.) $$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Ihre Wurzeln seien wieder $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$. Aus Satz 1 folgt dann unmittelbar

Satz 4. *Bedeuten* r, s *irgend zwei reelle Zahlen, die den Forderungen*

$$r > \Re(\varrho_i) > s \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

genügen, so gelten für jedes nicht identisch verschwindende Integral von (37.) *die Beziehungen:*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{e^{rx}} = 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y'}{e^{rx}} = 0, \quad \ldots \quad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(n-1)}}{e^{rx}} = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(n-1)}|}{e^{sx}} = \infty.$$

Übrigens lehrt die Gleichung (37.) selbst, daß dann auch noch die weitere Beziehung gilt:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y^{(n)}}{e^{rx}} = 0.$$

Dagegen wäre es falsch etwa zu glauben, daß stets

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y|}{e^{sx}} = \infty$$

sein müsse. Zum Beispiel genügt die Funktion $y = \sin x$ der Differentialgleichung $y'' + y = 0$. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind $\pm\sqrt{-1}$, so daß s jede negative Zahl bedeuten darf. Die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{|\sin x|}{e^{sx}} = \infty$$

ist aber augenscheinlich falsch, da der Zähler für gewisse beliebig große x verschwindet. Wohl aber ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{e^{sx}} = \infty$$

für jedes negative s, in Übereinstimmung mit Satz 4.

§ 5.

Wir wollen jetzt die Gleichung (37.) auf eine zweite Art in ein System von n Gleichungen transformieren. Setzt man sukzessive

(40.)
$$\begin{cases} y = z_1, \\ z_1' - \varrho_1 z_1 = z_2, \\ z_2' - \varrho_2 z_2 = z_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1}' - \varrho_{n-1} z_{n-1} = z_n, \end{cases}$$

so ist allgemein z_i eine lineare homogene Funktion von $y, y', \ldots y^{(i-1)}$ mit konstanten Koeffizienten, nämlich:

$$(41.)\quad \begin{cases} z_1 = y, \\ z_2 = y' - \varrho_1 y, \\ z_3 = y'' - (\varrho_1 + \varrho_2) y' + \varrho_1 \varrho_2 y, \\ z_4 = y''' - (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) y'' + (\varrho_1 \varrho_2 + \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_2 \varrho_3) y' - \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 y, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

wo das allgemeine Bildungsgesetz leicht ersichtlich ist. Durch Umkehrung ergibt sich daraus auch $y^{(\lambda-1)}$ als lineare homogene Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_\lambda$ mit konstanten Koeffizienten. Weiter folgt aus (40.) oder (41.):

$$\begin{aligned} z_n' - \varrho_n z_n &= y^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} \varrho_i y^{(n-1)} + \sum_{i<k}^{1,n} \varrho_i \varrho_k y^{(n-2)} - \cdots \pm \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n y \\ &= y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y, \end{aligned}$$

weil ja $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ die Wurzeln der Gleichung (39.) sind. Also auch, da y ein Integral der Gleichung (37.) sein soll,

$$z_n' - \varrho_n z_n = (a_1 - f_1(x)) y^{(n-1)} + (a_2 - f_2(x)) y^{(n-2)} + \cdots + (a_n - f_n(x)) y.$$

Die hier auftretenden Koeffizienten $a_\lambda - f_\lambda(x)$ haben für $x = \infty$ den Grenzwert Null. Da sich aber, wie gerade bemerkt, $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ linear durch $z_1, z_2, \ldots z_n$ ausdrücken lassen mit konstanten Koeffizienten, so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$(42.)\qquad z_n' - \varrho_n z_n = \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu(x) z_\mu,$$

wobei

$$(43.)\qquad \lim_{x=\infty} \varphi_\mu(x) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Die Gleichung (37.) geht also durch die Substitution (40.) oder, was dasselbe ist, (41.) über in folgendes System:

$$(44.)\quad \begin{cases} z_1' = \varrho_1 z_1 + z_2, \\ z_2' = \varrho_2 z_2 + z_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1}' = \varrho_{n-1} z_{n-1} + z_n, \\ z_n' = \varrho_n z_n + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu(x) z_\mu. \end{cases}$$

Dieses ist von der speziellen Form (15.), so daß wir die Sätze 2 und 3 darauf anwenden können. Ist zunächst $\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_\lambda)$ für $\lambda = 2, 3, \ldots n$, so existieren nach Satz 2 n linear unabhängige Integrale mit der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\lambda}{z_1} = 0, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

woraus nach (41.) sukzessive folgt:

$$(45.)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{y'}{y}=\varrho_1,\quad \lim_{x=\infty}\frac{y''}{y}=\varrho_1^2,\ \dots\quad \lim_{x=\infty}\frac{y^{(n-1)}}{y}=\varrho_1^{n-1}.$$

Die Gleichung (37.) selbst lehrt dann, daß auch noch

$$(46.)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{y^{(n)}}{y}=\varrho_1^n$$

ist. Somit ergibt sich

Satz 5. *Wenn* $\Re(\varrho_1)>\Re(\varrho_\lambda)$ *ist für* $\lambda=2,3,\dots n$, *so hat die Gleichung* (37.) *ein Integral, für welches*

$$\lim_{x=\infty}\frac{y'}{y}=\varrho_1,\quad \lim_{x=\infty}\frac{y''}{y}=\varrho_1^2,\ \dots\quad \lim_{x=\infty}\frac{y^{(n)}}{y}=\varrho_1^n$$

ist. Es gibt sogar n linear unabhängige Integrale dieser Art.

Aus den Gleichungen (45.) und (46.) folgt leicht

$$(47.)\quad \lim_{x=\infty}\frac{y'}{y}=\varrho_1,\ \lim_{x=\infty}\frac{d}{dx}\Big(\frac{y'}{y}\Big)=0,\ \lim_{x=\infty}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{y'}{y}\Big)=0,\ \dots\ \lim_{x=\infty}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big(\frac{y'}{y}\Big)=0.$$

In der Tat bemerkt man durch den Schluß von λ auf $\lambda+1$, daß $\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\Big(\frac{y'}{y}\Big)$ eine Summe ist von lauter Gliedern der Form

$$\pm\frac{y^{(\alpha)}}{y}\frac{y^{(\beta)}}{y}\cdots\frac{y^{(\delta)}}{y},\qquad (\alpha+\beta+\cdots+\delta=\lambda+1)$$

wobei ebensoviele Plus- wie Minuszeichen vorkommen. Ein solches Glied hat aber, wenn $\lambda\leqq n-1$ ist, nach (45.) und (46.) den Grenzwert

$$\pm\varrho_1^{\alpha+\beta+\cdots+\delta}=\pm\varrho_1^{\lambda+1}.$$

Ihre Summe ist also Null, womit (47.) bewiesen ist. Ebenso folgt aus (47.) rückwärts wieder (45.) und (46.).

Ist also y_1 ein Integral von der in Satz 5 angegebenen Art und setzt man $\frac{y_1'}{y_1}=\omega(x)$, so hat $\omega(x)$ für $x=\infty$ den Grenzwert ϱ_1, während die $n-1$ ersten Ableitungen von $\omega(x)$ den Grenzwert Null haben. Da y_1 auch der Differentialgleichung $y'-\omega(x)y=0$ genügt, so können wir also den Satz 5 auch folgendermaßen formulieren:

Satz 5a. *Wenn* $\Re(\varrho_1)>\Re(\varrho_\lambda)$ *ist für* $\lambda=2,3,\dots n$, *so gibt es Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$y'-\omega(x)y=0$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty}\omega(x)=\varrho_1,\quad \lim_{x=\infty}\omega'(x)=0,\quad \lim_{x=\infty}\omega''(x)=0,\dots,\quad \lim_{x=\infty}\omega^{(n-1)}(x)=0,$$

deren Integrale auch Integrale von (37.) *sind.*

Bei dieser Fassung läßt der Satz die folgende Verallgemeinerung zu:

Satz 6. *Läßt sich von der linken Seite der charakteristischen Gleichung*

$$f(\varrho) \equiv \varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

ein Faktor

$$\omega(\varrho) \equiv \varrho^k + c_1 \varrho^{k-1} + \cdots + c_k$$

abspalten derart, daß jede Wurzel von $\omega(\varrho)$ einen größeren reellen Teil hat als die $n-k$ andern Wurzeln von $f(\varrho)$, so gibt es Differentialgleichungen k-ter Ordnung

$$y^{(k)} + \omega_1(x) y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x) y = 0$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} \omega_\lambda(x) = c_\lambda, \quad \lim_{x=\infty} \omega_\lambda'(x) = 0, \ldots, \quad \lim_{x=\infty} \omega_\lambda^{(n-k)}(x) = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k)$$

deren sämtliche Integrale auch Integrale von (37.) *sind.*

Zum Beweis seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_k$ die Wurzeln von $\omega(\varrho)$; ihre reellen Teile sind also größer als die reellen Teile der andern Wurzeln $\varrho_{k+1}, \ldots \varrho_n$ von $f(\varrho)$. Nach Satz 3 hat dann das Gleichungssystem (44.) k linear unabhängige Integralsysteme

$$z_1 = z_{1,\nu}, \quad z_2 = z_{2,\nu}, \ldots, \quad z_n = z_{n,\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots k)$$

für welche

$$\lim_{x=\infty} \frac{\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & \cdots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{k,1} & \cdots & z_{k,k} \end{vmatrix}} = 0 \tag{48.}$$

ist bei jeder von $(1, 2, \ldots k)$ verschiedenen Kombination $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k)$ der Indizes $1, 2, \ldots n$. Diesen k Integralsystemen entsprechen vermöge der Transformation (41.) k linear unabhängige Integrale von (37.), die wir mit $y_1, y_2, \ldots y_k$ bezeichnen wollen; es ist also

$$\left.\begin{aligned} z_{1,\nu} &= y_\nu, \\ z_{2,\nu} &= y_\nu' - \varrho_1 y_\nu, \\ z_{3,\nu} &= y_\nu'' - (\varrho_1 + \varrho_2) y_\nu' + \varrho_1 \varrho_2 y_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots k) \tag{49.}$$

Nun wollen wir zeigen, daß diese Integrale $y_1, y_2, \ldots y_k$ einer Differentialgleichung k-ter Ordnung von der in Satz 6 angegebenen Art genügen. Die homogene lineare Differentialgleichung mit den Integralen $y_1, y_2, \ldots y_k$ ist nämlich zunächst:

$$(50.)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_k & y \\ y_1' & \cdots & y_k' & y' \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ y_1^{(k)} & \cdots & y_k^{(k)} & y^{(k)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ y_1' & \cdots & y_k' \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

wofür wir kürzer schreiben wollen, indem wir den Zähler nach den Elementen der letzten Kolonne entwickeln:

$$(51.)\qquad y^{(k)} + \omega_1(x)y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x)y = 0.$$

Es ist also nur zu zeigen, daß den Koeffizienten ω_λ die in Satz 6 angegebene Eigenschaft zukommt. Setzt man aber zur Abkürzung

$$(52.)\qquad \begin{cases} y = Z_1, \\ y' - \varrho_1 y = Z_2, \\ y'' - (\varrho_1 + \varrho_2)y' + \varrho_1\varrho_2 y = Z_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k)} + c_1 y^{(k-1)} + \cdots + c_k y = Z_{k+1}, \end{cases}$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_k$ die in Satz 6 angegebene Bedeutung haben, so geht die Gleichung (50.), indem man zu den einzelnen Zeilen der beiden Determinanten die Elemente der vorausgehenden Zeilen, mit passenden Faktoren multipliziert, hinzuzählt, über in:

$$(53.)\qquad \begin{vmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,k} & Z_1 \\ z_{2,1} & \cdots & z_{2,k} & Z_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ z_{k+1,1} & \cdots & z_{k+1,k} & Z_{k+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{k,1} & \cdots & z_{k,k} \end{vmatrix} = 0,$$

wofür wir, den Zähler nach den Elementen der letzten Kolonne entwickelnd, schreiben wollen:

$$(54.)\qquad Z_{k+1} + \chi_1(x)Z_k + \cdots + \chi_k(x)Z_1 = 0.$$

Diese Gleichung muß nach ihrer Herleitung durch die Substitution (52.) übergehen in (50.), also auch in (51.). Setzt man aber für die Z_λ die Werte aus (52.) in (54.) ein, so kommt:

$$y^{(k)} + c_1 y^{(k-1)} + \cdots + c_k y + \psi_1(x)y^{(k-1)} + \psi_2(x)y^{(k-2)} + \cdots + \psi_k(x)y = 0,$$

wobei die $\psi_\lambda(x)$ sich linear homogen mit konstanten Koeffizienten aus den $\chi_\mu(x)$ zusammensetzen, etwa

$$\psi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{k} e_{\lambda,\mu}\chi_\mu(x). \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k)$$

Durch Vergleich mit (51.) folgt also:

$$\omega_\lambda(x) = c_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k} e_{\lambda,\mu}\chi_\mu(x). \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k)$$

Die in Satz 6 behaupteten Eigenschaften der Funktionen $\omega_\lambda(x)$ werden also bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß

$$\lim_{x=\infty} \chi_\mu(x) = 0, \quad \lim_{x=\infty} \chi'_\mu(x) = 0, \ldots \quad \lim_{x=\infty} \chi_\mu^{(n-k)}(x) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots k).$$

ist. Nun folgt aber aus der Definition der $\chi_\mu(x)$ in (53.), (54.):

$$\chi_\mu(x) = \frac{\Delta_\mu}{\Delta_0}, \tag{55.}$$

$(\mu = 1, 2, \ldots k)$

wobei

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{k,1} & \cdots & z_{k,k} \end{vmatrix}, \tag{56.}$$

während $\pm \Delta_\mu$ aus Δ_0 hervorgeht, indem die $(k-\mu+1)$-te Zeile durch $z_{k+1,1} \cdots z_{k+1,k}$ ersetzt wird. Nach (48.) ist also zunächst

$$\lim_{x=\infty} \chi_\mu(x) = \lim_{x=\infty} \frac{\Delta_\mu}{\Delta_0} = 0. \tag{57.}$$

$(\mu = 1, 2, \ldots k)$

Berechnet man nun von der Determinante Δ_μ für $\mu \geqq 1$ die Ableitung Δ'_μ, indem man zuerst die Elemente der ersten Zeile durch ihre Ableitungen ersetzt, sodann die Elemente der zweiten Zeile usw., und die k so entstehenden Determinanten addiert, so kann man die dabei auftretenden Ableitungen $z'_{\lambda,\nu}$ wieder durch die $z_{\varkappa,\nu}$ selbst ausdrücken, weil diese ja partikuläre Integrale des Systems (44.) sind; der größte hierbei auftretende vordere Index von z ist $k+2$. Dadurch wird schließlich Δ'_μ linear mit konstanten Koeffizienten aufgebaut aus lauter Determinanten, die, soweit sie nicht wegen Gleichheit zweier Zeilen identisch verschwinden, von der Art sind, wie sie in Formel (48.) im Zähler stehen. Es wird also auch

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Delta'_\mu}{\Delta_0} = 0. \tag{57'.}$$

$(\mu = 1, 2, \ldots k)$

Indem man den soeben für Δ'_μ gefundenen Ausdruck nochmals differenziert und dann die Ableitungen $z'_{\lambda,\nu}$ wieder durch die $z_{\varkappa,\nu}$ selbst ausdrückt, wird auch Δ''_μ linear mit konstanten Koeffizienten aus lauter solchen Determinanten aufgebaut; der größte hierbei auftretende vordere Index von z ist $k+3$. Somit kommt auch

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Delta''_\mu}{\Delta_0} = 0. \tag{57''.}$$

$(\mu = 1, 2, \ldots k)$

So kann man fortfahren bis zur Ableitung $\Delta_\mu^{(n-k-1)}$. Auch diese läßt sich linear aus lauter solchen Determinanten zusammensetzen, wobei jetzt der vordere Index der z bis zu n aufsteigt. Differenziert man dann

nochmals und drückt die $z'_{\lambda,\nu}$ wieder durch die $z_{\varkappa,\nu}$ selbst aus, so erscheint auch $\Delta_\mu^{(n-k)}$ aus lauter solchen Determinanten linear aufgebaut; nur sind diesmal die Koeffizienten nicht mehr konstant, sondern es treten noch die in (44.) vorkommenden Funktionen $\varphi_\mu(x)$ auf. Da diese aber für $x = \infty$ den Grenzwert Null haben, so folgt doch noch:

$$(57^{(n-k)}.) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\Delta_\mu^{(n-k)}}{\Delta_0} = 0. \qquad (\mu = 1, 2, \dots k)$$

Etwas anders gestaltet sich die Rechnung für $\mu = 0$. Bildet man nämlich die Ableitung von Δ_0 und drückt darin die Ableitungen $z'_{\lambda,\nu}$ durch die $z_{\varkappa,\nu}$ selbst aus, so erscheint Δ'_0 linear zusammengesetzt aus lauter Determinanten von der Art, wie sie im Zähler von (48.) stehen; *außerdem kommt aber auch die Nennerdeterminante von* (48.), *d. i.* Δ_0 *selbst vor.* Ebenso ist es bei den höheren Ableitungen. Demzufolge sind die Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Delta'_0}{\Delta_0}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{\Delta''_0}{\Delta_0}, \dots \quad \lim_{x=\infty} \frac{\Delta_0^{(n-k)}}{\Delta_0}$$

zwar nicht Null, aber doch bestimmte *endliche* Zahlen*).

Nun sieht man leicht durch den Schluß von λ auf $\lambda + 1$, daß der Ausdruck

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\Delta_\mu}{\Delta_0}\right) \qquad (\mu = 1, 2, \dots k)$$

eine Summe ist von lauter Gliedern der Form

$$\pm \frac{\Delta_\mu^{(\alpha)}}{\Delta_0} \frac{\Delta_0^{(\beta)}}{\Delta_0} \cdots \frac{\Delta_0^{(\delta)}}{\Delta_0}, \qquad (\alpha + \beta + \cdots + \delta = \lambda)$$

wobei übrigens auch $\alpha = 0$ sein kann. Wegen des ersten Faktors verschwindet aber, wenn $\lambda \leqq n - k$ ist, jedes solche Glied für $\lim x = \infty$ (nach den Gleichungen (57.) bis $(57^{(n-k)}.)$). Daher folgt:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Delta_\mu}{\Delta_0} = 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_\mu}{\Delta_0}\right) = 0, \dots \quad \lim_{x=\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(\frac{\Delta_\mu}{\Delta_0}\right) = 0$$

für $\mu = 1, 2, \dots k$. Oder also mit Rücksicht auf (55.):

$$\lim_{x=\infty} \chi_\mu(x) = 0, \quad \lim_{x=\infty} \chi'_\mu(x) = 0, \dots \quad \lim_{x=\infty} \chi_\mu^{(n-k)}(x) = 0. \quad \text{W. z. b. w.}$$

---

*) Da in Δ_0 der vordere Index von z nur bis zu k aufsteigt, kann man hier nach der gleichen Methode sogar noch eine weitere Ableitung bilden. Man findet unschwer:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Delta_0^{(\lambda)}}{\Delta_0} = (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k)^\lambda. \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n-k+1)$$

Doch kommt es auf die genauen Werte nicht an.

§ 6.

Unter den Voraussetzungen von Satz 6 sei $y_1, y_2, \dots y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (37.), wobei speziell $y_1, y_2, \dots y_k$ die Integrale von

$$(58.) \qquad y^{(k)} + \omega_1(x)\, y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x)\, y = 0$$

seien. Es ist also

$$(59.) \quad y_\lambda^{(k)} + \omega_1(x)\, y_\lambda^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x)\, y_\lambda = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots k,$$

und wir setzen weiter:

$$(60.) \quad y_\lambda^{(k)} + \omega_1(x)\, y_\lambda^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x)\, y_\lambda = u_\lambda \quad \text{für } \lambda = k+1, \dots n.$$

Die u_λ sind linear unabhängig. Denn wäre etwa

$$C_{k+1} u_{k+1} + C_{k+2} u_{k+2} + \cdots + C_n u_n = 0,$$

so wäre die Funktion

$$C_{k+1} y_{k+1} + C_{k+2} y_{k+2} + \cdots + C_n y_n$$

ein Integral von (58.), ließe sich also linear durch $y_1, y_2, \dots y_k$ ausdrücken, während doch $y_1, y_2, \dots y_n$ linear unabhängig sind. Die u_λ sind ferner Funktionen, deren $n-k$ erste Ableitungen existieren. Denn die y_λ haben als Integrale von (37.) mindestens n Ableitungen, die ω_μ nach Satz 6 mindestens $n-k$ Ableitungen. Infolgedessen gibt es eine (und nur eine) lineare homogene Differentialgleichung

$$(61.) \qquad u^{(n-k)} + \varphi_1(x)\, u^{(n-k-1)} + \cdots + \varphi_{n-k}(x)\, u = 0^*)$$

mit den Integralen $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots u_n$. Macht man dann in (61.) die Substitution

$$u = y^{(k)} + \omega_1(x)\, y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x)\, y,$$

so hat die entstehende Differentialgleichung n-ter Ordnung für y sowohl die Integrale $y_1, \dots y_k$, als auch die Integrale $y_{k+1}, \dots y_n$; sie ist also mit (37.) identisch. Somit ergibt sich die folgende Identität:

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(y^{(k)} + \omega_1 y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k y) + \varphi_1 \cdot \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(y^{(k)} + \omega_1 y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k y)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\

$$\omega_1 + \varphi_1 = f_1,$$
$$(n-k)\omega_1' + \omega_2 + \varphi_1\omega_1 + \varphi_2 = f_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_k^{(n-k)} + \varphi_1\omega_k^{(n-k-1)} + \cdots + \varphi_{n-k}\omega_k = f_n.$$

Hieraus ergibt sich, indem man x über alle Grenzen wachsen läßt, mit Hilfe von Satz 6 sukzessive die Existenz der folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x=\infty}\varphi_1 = b_1,\ \lim_{x=\infty}\varphi_2 = b_2, \ldots,\ \lim_{x=\infty}\varphi_{n-k} = b_{n-k},$$

und zwar ist

$$c_1 + b_1 = a_1,$$
$$c_2 + b_1c_1 + b_2 = a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{n-k}c_k = a_n.$$

Das heißt, es besteht die Identität:

$$\varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + \cdots + a_n = (\varrho^{n-k} + b_1\varrho^{n-k-1} + \cdots + b_{n-k})(\varrho^k + c_1\varrho^{k-1} + \cdots + c_k).$$

Somit erhalten wir

Satz 7. *Zerlegt man die linke Seite der charakteristischen Gleichung*

$$f(\varrho) \equiv \varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

irgendwie in zwei Faktoren

$$f(\varrho) = \varphi(\varrho)\,\omega(\varrho),$$

wobei

$$\varphi(\varrho) \equiv \varrho^{n-k} + b_1\varrho^{n-k-1} + \cdots + b_{n-k},$$
$$\omega(\varrho) \equiv \varrho^k + c_1\varrho^{k-1} + \cdots + c_k,$$

aber so, daß jede Wurzel von $\omega(\varrho)$ einen größeren reellen Teil hat als jede Wurzel von $\varphi(\varrho)$, so läßt sich die Differentialgleichung (37.) *auf die Form bringen:*

$$u^{(n-k)} + \varphi_1(x)u^{(n-k-1)} + \cdots + \varphi_{n-k}(x)u = 0,$$

wobei u die Bedeutung

$$u = y^{(k)} + \omega_1(x)y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x)y$$

hat und die Koeffizienten $\varphi_\lambda(x)$, $\omega_\mu(x)$ folgendes Verhalten zeigen:

$$\lim_{x=\infty}\varphi_\lambda(x) = b_\lambda,\ \lim_{x=\infty}\omega_\mu(x) = c_\mu,$$
$$\lim_{x=\infty}\omega_\mu'(x) = 0, \ldots\quad \lim_{x=\infty}\omega_\mu^{(n-k)}(x) = 0. \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots n-k\\ \mu = 1, 2, \ldots k\end{pmatrix}$$

§ 7.

Wir sind nunmehr imstande, das folgende Fundamentaltheorem zu beweisen:

Satz 8. *Sind* $r_1, r_2, \dots r_\sigma$ *die voneinander verschiedenen reellen Teile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ist allgemein* e_λ *die Anzahl der Wurzeln mit dem reellen Teil* r_λ, *wobei mehrfache Wurzeln ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt sind, so hat die Differentialgleichung* (37.) *ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in* σ *Klassen zerfallen, daß allgemein für die Integrale der* λ*-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen die Beziehungen statthaben:*

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(n)}|}{e^{(r_\lambda + \varepsilon)x}} = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(n-1)}|}{e^{(r_\lambda - \varepsilon)x}} = \infty,$$

wie klein auch die positive Zahl ε *sei. Die Anzahl der Integrale der* λ*-ten Klasse ist dabei* e_λ.

Haben alle n Wurzeln gleichen reellen Teil, ist also $\sigma = 1$, so deckt sich der Satz mit Satz 4 und dem dort beigefügten Nachsatz, braucht also nicht mehr bewiesen zu werden.

Es sei daher $\sigma > 1$. Wir ordnen dann die reellen Teile der Größe nach:

(62.) $$r_1 > r_2 > \cdots > r_\sigma,$$

und nehmen an, für Differentialgleichungen von geringerer als der n-ten Ordnung sei der Satz bereits bewiesen (für die erste Ordnung ist er ja evident). Alsdann nehmen wir die Zerlegung von Satz 7 in der Weise vor, daß $\varphi(\varrho)$ nur die Wurzeln mit dem kleinsten reellen Teil, d. i. r_σ hat, $\omega(\varrho)$ alle andern. Der Grad $n - k$ von $\varphi(\varrho)$ ist also

(63.) $$n - k = e_\sigma.$$

Die Differentialgleichung

(64.) $$y^{(k)} + \omega_1(x) y^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x) y = 0$$

hat dann, da sie nur vom Grad $k (< n)$ ist, ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \dots y_k$, die derart in $\sigma - 1$ Klassen zerfallen, daß für die Integrale der λ-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen die Beziehungen gelten:

(65.) $$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(k)}|}{e^{(r_\lambda + \varepsilon)x}} = 0,$$

(66.) $$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(k-1)}|}{e^{(r_\lambda - \varepsilon)x}} = \infty.$$

Diese Integrale befriedigen aber nach Satz 7 zugleich die gegebene Differentialgleichung (37.), und um zu erkennen, daß sie für diese gerade

die behaupteten Integrale der $\sigma - 1$ ersten Klassen sind, braucht man nur zu zeigen, daß auch

$$\lim_{x=\infty} \frac{y^{(k+1)}}{e^{(r_\lambda+\varepsilon)x}} = 0, \dots \quad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(n)}}{e^{(r_\lambda+\varepsilon)x}} = 0$$

ist. Das ergibt sich aber sofort durch wiederholte Differentiation von (64.) unter Berücksichtigung der Formel (65.) und des Umstandes, daß

$$\lim_{x=\infty} \omega_\mu(x) = c_\mu, \ \lim_{x=\infty} \omega_\mu^{(\nu)}(x) = 0 \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \dots n-k$$

ist (Satz 7).

Um jetzt auch die e_σ Integrale der letzten Klasse nachzuweisen, sei $u_1, u_2, \dots u_{e_\sigma}$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (siehe Satz 7):

$$(67.) \qquad u^{(n-k)} + \varphi_1(x)u^{(n-k-1)} + \cdots + \varphi_{n-k}(x)u = 0. \qquad (n-k=e_\sigma)$$

Die Wurzeln der zu (67.) gehörigen charakteristischen Gleichung haben alle den reellen Teil r_σ, so daß nach Satz 4 und dem dort beigefügten Nachsatz

$$(68.) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{|u_\mu| + |u'_\mu| + \cdots + |u_\mu^{(n-k)}|}{e^{(r_\sigma+\varepsilon)x}} = 0 \qquad (\mu=1, 2, \dots e_\sigma)$$

sein wird. Wir setzen dann

$$(69.) \qquad y_{k+\mu} = \int_\infty^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) & \cdots & y_1^{(k-2)}(t) & y_1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t) & y_k'(t) & \cdots & y_k^{(k-2)}(t) & y_k(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) & \cdots & y_1^{(k-1)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t) & y_k'(t) & \cdots & y_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}} u_\mu(t)\,dt, \qquad (\mu=1, 2, \dots e_\sigma)$$

unter $y_1, \dots y_k$ wieder die bereits gefundenen Integrale der $\sigma - 1$ ersten Klassen verstanden, und wollen zeigen, daß die Ausdrücke (69.) existieren und gerade die Integrale der σ-ten Klasse sind.

Bekanntlich ist, da $y_1, y_2, \dots y_k$ die Integrale von (64.) sind,

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) & \cdots & y_1^{(k-1)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t) & y_k'(t) & \cdots & y_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix} = C \cdot e^{-\int_a^t \omega_1(x)\,dx} \neq 0.$$

Weil aber

$$\lim_{x=\infty} \Re(-\omega_1(x)) = \Re(-c_1) = \Re(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k)$$
$$= e_1 r_1 + e_2 r_2 + \cdots + e_{\sigma-1} r_{\sigma-1},$$

so folgt hieraus für große Werte von t:

$$\operatorname{abs}\begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) & \cdots & y_1^{(k-1)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t) & y_k'(t) & \cdots & y_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix} > e^{(e_1 r_1 + e_2 r_2 + \cdots + e_{\sigma-1} r_{\sigma-1} - \varepsilon)t}.$$

Ferner ist in der Zählerdeterminante von (69.) der Koeffizient von $y_\nu(x)$ eine $(k-1)$-reihige Determinante, von der jedes ihrer $(k-1)!$ Glieder, wenn y_ν etwa in die λ-te Klasse gehört, für große t absolut kleiner ist als

$$e^{(e_1 r_1 + \cdots + (e_\lambda - 1) r_\lambda + \cdots + e_{\sigma-1} r_{\sigma-1} + \varepsilon)t}.$$

Endlich folgt aus (68.) für große Werte von t:

$$|u_\mu(t)| < e^{(r_\sigma + \varepsilon)t}.$$

Schreibt man daher den Ausdruck (69.), indem man die Zählerdeterminante nach den Elementen der letzten Kolonne entwickelt, in der Form

$$(70.) \qquad y_{k+\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} y_\nu(x) \int_\infty^x \Phi_{\nu,\mu}(t)\,dt, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots e_\sigma)$$

so wird für genügend große t, wenn wieder y_ν in die λ-te Klasse gehört,

$$|\Phi_{\nu,\mu}(t)| < \frac{(k-1)!\, e^{(e_1 r_1 + \cdots + (e_\lambda - 1) r_\lambda + \cdots + e_{\sigma-1} r_{\sigma-1} + \varepsilon)t}}{e^{(e_1 r_1 + \cdots + e_\lambda r_\lambda + \cdots + e_{\sigma-1} r_{\sigma-1} - \varepsilon)t}} e^{(r_\sigma + \varepsilon)t}$$

$$< e^{(r_\sigma - r_\lambda + 4\varepsilon)t}.$$

Da aber $r_\sigma < r_\lambda$, und da ε beliebig klein gewählt werden kann, ergibt sich hieraus, daß die Integrale in (70.), also auch in (69.) wirklich existieren. Zugleich erhält man für große Werte von x die Abschätzungsformel:

$$\left|\int_\infty^x \Phi_{\nu,\mu}(t)\,dt\right| \leqq \int_x^\infty |\Phi_{\nu,\mu}(t)|\,dt < \frac{e^{(r_\sigma - r_\lambda + 4\varepsilon)x}}{r_\lambda - r_\sigma - 4\varepsilon}.$$

Daher, weil y_ν in die λ-te Klasse gehören sollte,

$$|y_\nu(x) \int_\infty^x \Phi_{\nu,\mu}(t)\,dt| < e^{(r_\lambda + \varepsilon)x} \frac{e^{(r_\sigma - r_\lambda + 4\varepsilon)x}}{r_\lambda - r_\sigma - 4\varepsilon} = \frac{e^{(r_\sigma + 5\varepsilon)x}}{r_\lambda - r_\sigma - 4\varepsilon}.$$

Daraus folgt aber:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\nu(x) \int_\infty^x \Phi_{\nu,\mu}(t)\,dt}{e^{(r_\sigma + 6\varepsilon)x}} = 0;$$

also wegen (70.) auch

$$(71.) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y_{k+\mu}}{e^{(r_\sigma + 6\varepsilon)x}} = 0. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots e_\sigma)$$

Um entsprechendes auch für die Ableitungen von $y_{k+\mu}$ nachzuweisen, differenzieren wir Formel (69.) wiederholt und erhalten*):

$$(72.)\quad y_{k+\mu}^{(\lambda)} = \int_{\infty}^{x} \frac{\begin{vmatrix} y_1(t)\, y_1'(t) & \cdots & y_1^{(k-2)}(t)\, y_1^{(\lambda)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t)\, y_k'(t) & \cdots & y_k^{(k-2)}(t)\, y_k^{(\lambda)}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_1^{(k-1)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t) & \cdots & y_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}} u_\mu(t)\, dt\,; \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k-1)$$

dagegen bei nochmaliger Differentiation:

$$(73.)\quad y_{k+\mu}^{(k)} = \int_{\infty}^{x} \frac{\begin{vmatrix} y_1(t)\, y_1'(t) & \cdots & y_1^{(k-2)}(t)\, y_1^{(k)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t)\, y_k'(t) & \cdots & y_k^{(k-2)}(t)\, y_k^{(k)}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_1^{(k-1)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k(t) & \cdots & y_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}} u_\mu(t)\, dt + u_\mu(x).$$

Aus (69.), (72.), (73.) folgt sofort, da $y_1, \ldots y_k$ die Integrale von (64.) sind,

$$(74.)\qquad y_{k+\mu}^{(k)} + \omega_1(x)\, y_{k+\mu}^{(k-1)} + \cdots + \omega_k(x)\, y_{k+\mu} = u_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots e_\sigma)$$

so daß nach Satz 7 die $y_{k+\mu}$ jedenfalls Integrale von (37.) *sind;* und zwar sind sie voneinander und von $y_1, \ldots y_k$ linear unabhängig. Denn wäre

$$C_1 y_1 + \cdots + C_k y_k + C_{k+1} y_{k+1} + \cdots + C_n y_n = 0,$$

so wäre auch

$$C_1 y_1^{(\lambda)} + \cdots + C_k y_k^{(\lambda)} + C_{k+1} y_{k+1}^{(\lambda)} + \cdots + C_n y_n^{(\lambda)} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots k)$$

und, indem man mit $\omega_{k-\lambda}(x)$ multipliziert und dann nach λ summiert, würde mit Rücksicht auf (74.) folgen:

$$C_{k+1} u_1 + \cdots + C_n u_{e_\sigma} = 0;$$

also, da $u_1, \ldots u_{e_\sigma}$ linear unabhängig sind,

$$C_{k+1} = 0, \ldots C_n = 0.$$

Sodann bliebe noch

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_k y_k = 0$$

übrig, so daß auch $C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots C_k = 0$ sein müßte.

Es ist nun noch zu zeigen, daß die Integrale $y_{k+\mu}$ gerade die σ-te Klasse bilden. Aber genau, wie wir (71.) aus (69.) folgerten, läßt sich aus (72.) folgern:

*) Hierbei wird nur scheinbar eine Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt, die erst zu begründen wäre. Denn man kann das Integral (69.) in der Form (70.) schreiben, sodann die Differentiation ausführen und das Resultat nachträglich wieder in die Form (72.) zusammenziehen.

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{k+\mu}^{(\lambda)}}{e^{(r_\sigma+6\varepsilon)x}} = 0. \qquad (\lambda=1,2,\ldots k-1) \tag{75.}$$

Sodann folgt aus (74.) und durch wiederholte Differentiation von (74.) mit Rücksicht auf (68.) sukzessive:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{k+\mu}^{(\lambda)}}{e^{(r_\sigma+6\varepsilon)x}} = 0. \qquad (\lambda=k,k+1,\ldots n) \tag{76.}$$

Da in den Gleichungen (71.), (75.), (76.) ε beliebig klein sein darf, so kann man auch ε statt 6ε schreiben und erhält

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y_{k+\mu}| + |y'_{k+\mu}| + \cdots + |y_{k+\mu}^{(n)}|}{e^{(r_\sigma+\varepsilon)x}} = 0.$$

Außerdem ist aber für alle Integrale von (37.) nach Satz 4

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(n-1)}|}{e^{(r_\sigma-\varepsilon)x}} = \infty.$$

Das gilt also insbesondere auch für die Integrale $y_{k+1}, \ldots y_n$ und ihre linearen Verbindungen. Diese sind also in der Tat die gesuchten Integrale der σ-ten Klasse. W. z. b. w.

Berichtigung zu dem Aufsatze „Über *Lambert*sche Reihen".
(Band 142, S. 283—315).

Von Herrn *Konrad Knopp* in Berlin-Lichterfelde.

In den Anmerkungen *) S. 293, **) S. 300 und *) S. 302 sind die zitierten Seitenzahlen 286, 294 und 287 je um 1 zu erniedrigen.

Auf S. 291, Formel (9.) ist die Summation rechterhand von $m = 0$ an zu erstrecken.

S. 312, Zeile 9 v. u., hat die Bedingung $q_\mu < \delta k_{\mu-2}$ (statt $\delta a_{\mu-2}$) zu lauten.

Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. II.

Abteilungsweise stetige Koeffizienten. Das zweite Randwertproblem. Gemischte Randbedingungen.

Von Herrn *Leon Lichtenstein* in Berlin.

In dem vor kurzem erschienenen ersten Teile dieser Arbeit*) habe ich das erste Randwertproblem der allgemeinen linearen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung unter Zugrundelegung ebener Gebiete recht allgemeiner Natur und beliebiger abteilungsweise stetiger Randwerte erledigt. In der vorliegenden zweiten Abhandlung komme ich zunächst noch einmal auf die erste Randwertaufgabe zurück. Es wird diesmal wieder eine elliptische Differentialgleichung in der Normalform betrachtet. Als Begrenzung des Gebietes werden, wie üblich, stetig gekrümmte Kurven angenommen. Von den Koeffizienten der Differentialgleichung wird vorausgesetzt, daß sie nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung *abteilungsweise stetig* sind. Diese Voraussetzung ist neu und für das folgende wesentlich.

Die Bestimmung einer gewissen zu dem zweiten Randwertproblem der Potentialtheorie gehörigen *Green*schen Funktion kann man mit Herrn *Koebe* dadurch dem alternierenden Verfahren zugänglich machen, daß man die gesuchte Lösung sich auf der Rückseite der Ebene in geeigneter Weise

*) Vgl. dieses Journal, Band 142, Heft 1, S. 1—40.

fortgesetzt denkt*). Versucht man bei den linearen elliptischen Differentialgleichungen in der Normalform analog vorzugehen, so gelangt man bei einer Fortsetzung der Lösung über das ursprünglich gegebene Gebiet hinaus zu Differentialgleichungen mit abteilungsweise stetigen Koeffizienten. Für das alternierende Verfahren tritt ein von mir früher angegebenes und zur Bestimmung gewisser doppeltperiodischer Lösungen angewandtes Verfahren ein**). Man kommt so auf ein System linearer Integralgleichungen mit stetigen Kernen. Wie in dem dritten Kapitel der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, kann man in ähnlicher Weise auch bei gemischten Randbedingungen das Problem auf die erste Randwertaufgabe zurückführen. Die Randwerte der gesuchten Lösung sowie die vorgeschriebenen Werte ihrer Normalableitung am Rande werden dabei stets als lediglich abteilungsweise stetig vorausgesetzt. Als eine weitere Anwendung desselben Gedankens erscheint am Schluß der beiden ersten Kapitel die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens gewisser *Green*scher Funktionen, wenn sowohl der Aufpunkt als auch das Argument sich demselben Punkte des Randes nähern. In dem später erscheinenden dritten Teile dieser Arbeit wird eine Reihe höherer Randwertaufgaben auf das in dem ersten Kapitel behandelte Problem reduziert. Man gelangt so zu einer einheitlichen Behandlung der Randwertprobleme linearer elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung überhaupt.

Was den Inhalt dieser Abhandlung im einzelnen anbetrifft, sei auf die Inhaltsübersicht am Schluß verwiesen.

Die Betrachtungen des ersten Kapitels stützen sich wesentlich auf den folgenden Hilfssatz, dessen Beweis hier unterbleiben kann.

Es sei T ein von einer geschlossenen, doppelpunktlosen, stetig gekrümmten Kurve S begrenztes Gebiet in der Ebene der Variabeln x und y. Es sei C ein stetig gekrümmtes, doppelpunktloses Kurvenstück in T, das

---

*) Vgl. *P. Koebe*, Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II, Math. Annalen, 1910, S. 1—81 (insb. S. 43—46) sowie „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“, dieses Journal, Bd. 138, 1910, woselbst die Randwertaufgabe mit gemischten Randbedingungen behandelt wird.

**) Vgl. Untersuchungen über die Randwertaufgaben. Periodische und doppeltperiodische Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1911, S. 219—254.

entweder in zwei Punkten von S endigt oder ganz im Innern von T verläuft und alsdann geschlossen ist. Es seien schließlich T_1 und $T_2 = T - T_1$ die beiden Gebiete, in die T durch C geteilt wird, $p(x, y)$ eine in T erklärte Funktion, die folgende Eigenschaften hat: Sie ist im Innern und auf dem Rande jedes der beiden Gebiete T_1 und T_2 stetig, ändert sich auf C sprungweise und genügt einer Ungleichheitsbedingung

$$|p(x+h, y+k) - p(x, y)| < A\{|h|^\lambda + |k|^\lambda\}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Hierin bezeichnet A eine gewisse positive Zahl. Die Punkte $(x+h, y+k)$ und (x, y) liegen beide entweder im Innern oder auf dem Rande von T_1, oder im Innern oder auf dem Rande von T_2. Kurz, $p(x, y)$ ist auf C sprungweise unstetig und genügt im Innern und auf dem Rande jedes der beiden Gebiete T_1 und T_2 der *Hölder*schen Bedingung.

Betrachten wir das logarithmische Potential

$$\bar{u}(x, y) = \iint_T p(\xi, \eta) \log \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

worin (x, y) einen Punkt in T bezeichnet.

Nach bekannten Sätzen sind $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ in T und auf S, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$ *im Innern* von T_1 und T_2 vorhanden und stetig. *Die zuletzt genannten partiellen Ableitungen ändern sich auf der Kurve C (ihre etwaigen Endpunkte vielleicht ausgenommen) sprungweise. Sie sind also im Innern von T abteilungsweise stetig.*

Kapitel I. Das erste Randwertproblem. Abteilungsweise stetige Koeffizienten.

§ 1. Reguläre Lösungen.

Es sei T ein einfach zusammenhängendes, von einer geschlossenen, doppelpunktlosen, stetig gekrümmten Kurve S begrenztes Gebiet in der Ebene der Variabeln x und y. Es sei C eine stetig gekrümmte, doppelpunktlose Kurve, die zwei Punkte von S miteinander verbindet und sonst ganz im Innern von T verläuft. Die beiden Gebiete, in die T durch C geteilt wird, mögen T_1 und T_2 heißen. Es sei ferner (ν) eine Normale von C, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die partielle Ableitung in der Richtung von (ν). Wir nehmen an, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung in T_1 und in T_2, die Begrenzung jedesmal eingeschlossen, stetig sind, *sich auf C indessen sprungweise ändern**).

Es ist diejenige beschränkte, in T, außer etwa auf C, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung (1.) zu bestimmen, die auf S eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge $\varphi(s)$ annimmt und auf C sich überall stetig verhält, wenn überdies bekannt ist, daß $\frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu}$ auf jedem ganz im Innern von T gelegenen Teile von C stetig ist**).

Es sei S' eine in der Nähe der Kurve S gelegene geschlossene, stetig gekrümmte, doppelpunktlose Kurve im Innern von T, und es sei T' das von ihr begrenzte einfach zusammenhängende Gebiet***). Im Innern von T' zu beiden Seiten von C denken wir uns zwei zu C parallele Kurven C_1 und C_2 bis zum Schnitt mit S' gezogen. Das Gebiet T' zerfällt hierdurch in drei Teile: einen C einschließenden Streifen und zwei links und rechts von diesem gelegene Gebiete T_1' und T_2'. Es sei $v(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Potentialfunktion, die auf S gleich $\varphi(s)$ wird, und $v'(x, y)$ diejenige in T' reguläre Potentialfunktion, welche auf S' dieselben Werte wie $u(x, y)$ annimmt. Es seien ferner C', S_1' und S_2' diejenigen Teile von C und S', die entsprechend den Gebieten T', T_1' und T_2' angehören, (x, y) irgendein Punkt in T_1' oder T_2' und $G'(x, y; \xi, \eta)$ die zu T' gehörige klassische *Green*sche Funktion.

Wir wenden die *Green*sche Formel

---

*) Bezüglich der Funktion $f(x, y)$ genügt es übrigens vorauszusetzen, daß sie im Innern von T_1 und T_2 (die Unstetigkeitslinie C jedesmal eingeschlossen) stetig ist und der *Hölder*schen Bedingung genügt.

**) Fällt ein Endpunkt von C mit einem Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ zusammen, so ist daselbst $u(x, y)$, entgegen der Aussage des Textes, natürlich nicht stetig, sondern nur beschränkt. Die folgenden Entwicklungen gelten auch, wenn über das Verhalten der Ableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in einer endlichen Anzahl von Punkten der Kurve C weiter nichts bekannt ist, als daß sie daselbst beschränkt ist.

***) Man kann für S' etwa eine zu S parallele Kurve wählen.

$$(2.)\quad \iint (w_1 \triangle w_2 - w_2 \triangle w_1)\, d\xi\, d\eta = -\int \left(w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} - w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n}\right) ds$$

auf die beiden Gebiete T_1' und T_2' an und setzen hierbei für w_1 und w_2 entsprechend $u(\xi, \eta)$ und $G'(x, y; \xi, \eta)$ ein. Wir addieren sodann die beiden sich ergebenden Beziehungen und erhalten

$$(3.)\quad \begin{aligned} u(x,y) = {} & \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{T_1'+T_2'} G'(x,y;\xi,\eta)\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,u(\xi,\eta) - f(\xi,\eta)\right] d\xi\, d\eta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_1+C_2} \left[u(\xi,\eta)\frac{\partial G'(x,y;\xi,\eta)}{\partial n} - G'(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n}\right] ds + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_1'+S_2'} u(\xi,\eta)\frac{\partial G'(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\, ds. \end{aligned}$$

Wir integrieren das erste Integral rechter Hand teilweise und lassen sodann die Kurven C_1 und C_2 mit C zusammenfallen. Es sei (x_0, y_0) irgend ein Punkt auf C und $a_1(x_0, y_0)$, $b_1(x_0, y_0)$ bzw. $a_2(x_0, y_0)$, $b_2(x_0, y_0)$ seien die Werte, gegen die $a(x, y)$ und $b(x, y)$ konvergieren, wenn man sich (x_0, y_0) von T_1 bzw. T_2 aus nähert. Wir setzen schließlich

$$\delta a(x_0, y_0) = a_2(x_0, y_0) - a_1(x_0, y_0),\ \delta b(x_0, y_0) = b_2(x_0, y_0) - b_1(x_0, y_0)$$

und erhalten aus (3.)

$$(4.)\quad \begin{aligned} u(x,y) = {} & -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{T'} \left[\frac{\partial(aG')}{\partial \xi} + \frac{\partial(bG')}{\partial \eta} - cG'\right] u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C'} G'(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\{\delta b\, d\xi - \delta a\, d\eta\} \\ & + v'(x,y) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{T'} G'(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Bei der Integration längs C' bleibt T_1' links zur Fortschreitungsrichtung liegen. Läßt man jetzt S' gegen S konvergieren, so erhält man schließlich

$$(5.)\quad \begin{aligned} u(x,y) = {} & -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{T} \left[\frac{\partial(aG)}{\partial \xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial \eta} - cG\right] u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C} G(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\{\delta b\, d\xi - \delta a\, d\eta\} \\ & + v(x,y) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{T} G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Jede in T stetige Lösung der Differentialgleichung (1.), *die auf C sich wie angegeben verhält, ist eine Lösung dieser Integralgleichung. Insbesondere genügen etwaige auf S verschwindende Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = 0$ der zu* (5.) *gehörigen homogenen Integralgleichung.*

Es sei umgekehrt $u(x, y)$ eine Lösung der Integralgleichung (5.).

Man zeigt wie in I § 1 des ersten Teiles zunächst, daß $u(x, y)$ in T der *Hölder*schen Bedingung genügt*).

Aus dem in der Einleitung angegebenen Hilfssatze und aus den bekannten Sätzen der Potentialtheorie folgt, daß im Innern und auf dem Rande jedes der beiden Gebiete, in die T' durch C' zerlegt wird, $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ vorhanden und stetig sind. Es wäre danach zunächst noch denkbar, daß auf C' diese partiellen Ableitungen sich sprungweise ändern. Aus (5.) folgt indessen nach einer teilweisen Integration

$$
\begin{aligned}
u(x, y) = & -\frac{1}{2\pi}\iint_{T-T'}\left[\frac{\partial(aG)}{\partial\xi}+\frac{\partial(bG)}{\partial\eta}-cG\right]u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\
& +\frac{1}{2\pi}\int_{C-C'}G(x, y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,\{\delta b\,d\xi-\delta a\,d\eta\} \\
& +v(x, y)-\frac{1}{2\pi}\int_{S'}G(x, y;\xi,\eta)\,\{a(\xi,\eta)\,d\eta-b(\xi,\eta)\,d\xi\} \\
& +\frac{1}{2\pi}\iint_{T'}G(x, y;\xi,\eta)\left\{a(\xi,\eta)\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\,\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu\right\}d\xi\,d\eta \\
& -\frac{1}{2\pi}\iint_{T}G(x, y;\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.
\end{aligned}
\tag{6.}
$$

Aus (6.) folgt nun zuerst, daß *die partiellen Ableitungen* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ *in* T' *und daher überhaupt in* T *stetig sind.* Wie bei der analogen Betrachtung in dem ersten Teile dieser Arbeit schließt man sodann, daß $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ in T der *Hölder*schen Bedingung genügen. Aus dem wiederholt benutzten Hilfssatze folgt ferner, *daß* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *in* T, *außer auf* C, *stetig sind und sich auf* C *sprungweise ändern.* Schließlich erhält man aus (6.) nach bekannten Sätzen die Beziehung

*) Man hat hierbei folgendes zu beachten:

1) Der auf S. 4 des ersten Teiles angegebene Hilfssatz gilt auch dann noch, wenn $p(x, y)$ abteilungsweise stetig ist.

2) Ist $q(\xi, \eta)$ eine auf C erklärte stetige Funktion, so genügt das Integral $\int_C q(\xi,\eta)\log\frac{1}{\varrho}\,ds$, $\varrho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$ für alle (x, y) in T der *Hölder*schen Bedingung. Vgl. z. B. *A. Korn*, Sur les équations de l'élasticité, Annales de l'École Normale, 1907, S. 9—75.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} - cu + f.$$

Daß $u(x, y)$ bei der Annäherung an den Rand in allen Punkten jedes die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden zusammenhängenden Teiles von S gleichmäßig gegen $\varphi(s)$ konvergiert, folgt aus den Sätzen der Potentialtheorie ohne weiteres. *Hat $\varphi(s)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so sind,* wie in dem nächstfolgenden Paragraphen bewiesen werden wird, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ *auf S stetig.*

Das gleiche tritt ein, wenn die zu (5.) gehörige homogene Integralgleichung von Null verschiedene Lösungen hat.

Wir haben den Betrachtungen dieses Paragraphen eine einzige Unstetigkeitskurve C zugrunde gelegt. Die Ergebnisse gelten im wesentlichen unverändert, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung sich längs einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurven in T sprungweise ändern. Diese Kurven können geschlossen oder ungeschlossen sein; sie können sich selbst oder einander in einer endlichen Anzahl von Punkten schneiden oder berühren. Außer etwa in den Punkten, in denen mehrere Unstetigkeitslinien zusammenlaufen, sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $u(x, y)$ auch jetzt noch abteilungsweise stetig. Über das Verhalten dieser Ableitungen in den ausgeschlossenen Punkten läßt sich aus dem Hilfssatze der Einleitung nichts Bestimmtes folgern.

Wir haben das Gebiet T als einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Unsere Betrachtungen gelten, wie man sich leicht überzeugt, in analoger Weise bei mehrfach zusammenhängenden, von geschlossenen stetig gekrümmten Kurven begrenzten Gebieten.

Wir haben über das Verhalten von $u(x, y)$ auf C zu Anfang dieses Paragraphen nur vorausgesetzt, daß $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in jedem ganz im Innern von T gelegenen Teile von C stetig ist*). Wir sehen, daß in T die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ doch stetig sind, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von u sich auf C sprungweise ändern. Zur Vereinfachung nennen wir künftig Lösungen, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung

*) Vgl. die Fußnote **) S. 54.

stetig sind, während ihre partiellen Ableitungen zweiter Ordnung längs einer endlichen Anzahl von Kurven sich sprungweise ändern, regulär*).

Aus den soeben durchgeführten Betrachtungen folgt, daß der Fundamentalsatz über die Existenz der Lösung des ersten Randwertproblems, der in I § 1 *des ersten Teiles dieser Arbeit aufgestellt worden ist, in seinem vollen Umfange bestehen bleibt.*

Und nun einige Bemerkungen über die Auflösung der Integralgleichung (5.) Wir setzen zur Abkürzung

$$(7.)\quad u(x,y) = \iint_T K(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_C L(x,y;s)\,u(s)\,ds + \psi(x,y).$$

Hierin bezeichnet ds das Bogendifferential von C und $u(s)$ den Wert von $u(x,y)$ im Punkte s auf C. Die Funktion $K(x,y;\xi,\eta)$ genügt für alle (x,y) und (ξ,η) in T und auf S einer Beziehung

$$(8.)\qquad |K(x,y;\xi,\eta)| < A_1[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Die für alle (x,y) in T und auf S und alle s auf C erklärte Funktion $L(x,y;s)$ erfüllt eine Relation

$$(9.)\qquad |L(x,y;s)| < A_2 \log\frac{1}{\varrho} + A_3.$$

A_1, A_2, A_3 sind wie später $A_4, A_5, \ldots$ gewisse positive Werte, ϱ ist die Entfernung der Punkte (x,y) und s. Schließlich ist $\psi(x,y)$ eine beschränkte in T stetige Funktion.

Setzt man in dem Doppelintegral in (7.) für $u(\xi,\eta)$ seinen Wert aus (7.) ein, so erhält man eine Integralgleichung von der Form

$$(10.)\quad u(x,y) = \iint_T K_1(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_C L_1(x,y;s)\,u(s)\,ds + \psi_1(x,y).$$

Die Funktion $L_1(x,y;s)$ verhält sich ganz wie $L(x,y;s)$, die Funktion $K_1(x,y;\xi,\eta)$ genügt dagegen einer Beziehung

$$(11.)\quad |K_1(x,y;\xi,\eta)| < A_4\,|\log|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|\,| + A_5.$$

Führt man in (10.) *sowohl für* $u(\xi,\eta)$ *als auch für* $u(s)$ die zugehörigen Werte aus (10.) ein, so erhält man

$$(12.)\quad u(x,y) = \iint_T K_2(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_C L_2(x,y;s)\,u(s)\,ds + \psi_2(x,y).$$

---

*) Es soll auch der Fall miteinbegriffen sein, daß in gewissen isoliert liegenden Punkten über das Verhalten der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gar keine Vorschriften gemacht werden.

Die Funktion $K_2(x, y; \xi, \eta)$ ist in T und auf S in bezug auf (x, y) stetig, in bezug auf (ξ, η) abteilungsweise stetig; die für alle (x, y) in T und auf S und für alle s auf C erklärte Funktion $L_2(x, y; s)$ ist stetig, $\psi_2(x, y)$ ist beschränkt und, außer in etwaigen Unstetigkeitspunkten von $\varphi(s)$, stetig. Die ausgeschlossenen Punkte sind Unbestimmtheitsstellen.

Zur Vereinfachung nehmen wir jetzt an, die nicht homogene Integralgleichung

$$u(s) = \int_C L_2(s, t)\, u(t)\, dt + \omega(s) \tag{13.}$$

sei stets lösbar; es sei $M_2(s, t)$ der lösende Kern von $L_2(s, t)$. Aus (13.) erhält man der bekannten *Fredholm*schen Auflösungsformel zufolge, wenn man $\psi_2(x, y)$ für (x, y) im Punkte s auf S gleich $\psi_2(s)$ setzt,

$$u(s) = \psi_2(s) + \iint_T K_2(s; \xi, \eta) u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_C M_2(s, t)\, \psi_2(t)\, dt + \int_C M_2(s, t)\, dt \iint_T K_2(t; \xi, \eta) u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

oder kürzer

$$u(s) = \psi_3(s) + \iint_T K_3(s; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{14.}$$

$$\psi_3(s) = \psi_2(s) + \int_C M_2(s, t)\, \psi_2(t)\, dt.$$

Dieser Wert in (12.) eingesetzt liefert

$$u(x, y) = \iint_T K_4(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \psi_4(x, y), \tag{15.}$$

$$\psi_4(x, y) = \psi_2(x, y) + \int_C L_2(x, y; t)\, \psi_3(t)\, dt.$$

Es möge nun die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung (1.) eindeutig lösbar sein. Alsdann ist auch die Integralgleichung (15.) stets eindeutig lösbar. Ist $H_4(x, y; \xi, \eta)$ ihr lösender Kern, so folgt aus (15.) die weitere Beziehung

$$u(x, y) = \psi_4(x, y) + \iint_T H_4(x, y; \xi, \eta)\, \psi_4(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{16.}$$

Es sei wie in I § 3 des ersten Teiles $\varphi^{(1)}(s)$, $\varphi^{(2)}(s)$, ... eine Folge stetiger Funktionen, die in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von S gegen $\varphi(s)$ gleichmäßig konvergieren,

$$\lim_{k=\infty} \varphi^{(k)}(s) = \varphi(s). \tag{17.}$$

Es sei überdies für alle k

$$|\varphi^{(k)}(s)| < A_6. \tag{18.}$$

Ist $u^{(k)}(x, y)$ *diejenige in* T *reguläre Lösung der Differentialgleichung* $L(u) = f$, *die auf* S *die Werte* $\varphi^{(k)}(s)$ *annimmt, so ist,* wie gleich gezeigt werden wird,

$$\lim_{k=\infty} u^{(k)}(x, y) = u(x, y).$$

In jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ *nicht enthaltenden Teile* T^* *von* T *ist der Grenzübergang gleichmäßig.*

Sind $\psi^{(k)}(x, y), \psi_1^{(k)}(x, y), \dots \psi_4^{(k)}(x, y)$ die der Randfunktion $\varphi^{(k)}(s)$ entsprechenden Werte der Funktionen $\psi, \psi_1, \dots \psi_4$, so findet man für alle (x, y) in jedem Gebiete T^* leicht

$$\lim_{k=\infty} \psi^{(k)}(x, y) = \psi(x, y), \dots \quad \lim_{k=\infty} \psi_4^{(k)}(x, y) = \psi_4(x, y),$$

$$|\psi_4^{(k)}(x, y)| < A_7. \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

Hieraus und aus (16.) folgt in T^*, wie behauptet,

$$\lim_{k=\infty} u^{(k)}(x, y) = u(x, y). \tag{19.}$$

Der Grenzübergang ist gleichmäßig.

Wir haben vorhin vorausgesetzt, die Integralgleichung (13.) sei eindeutig lösbar. Die Beziehung (19.) gilt, wie sich in ähnlicher Weise zeigen läßt, auch wenn diese Annahme nicht zutrifft.

§ 2. Reguläre Lösungen. (Fortsetzung.)

Es sei jetzt speziell $u_0(x, y)$ diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = f$ oder der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, die auf S verschwindet. Wir nehmen zunächst hypothetisch an, daß $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ sich auch noch auf S stetig verhalten, und setzen

$$\frac{\partial^2 u_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) - a\frac{\partial u_0}{\partial x} - b\frac{\partial u_0}{\partial y} - cu_0 = W(x, y). \tag{20.}$$

Die Funktion $W(x, y)$ ist im Gebiete T, die Begrenzung eingeschlossen, abteilungsweise stetig. Im Innern von T, außer höchstens auf C, erfüllt $W(x, y)$ die *Hölder*sche Bedingung. Aus (20.) folgt daher nach bekannten Sätzen

$$u_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T G(x, y; \xi, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \frac{\partial}{\partial x} G(x, y; \xi, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{21.}$$

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \frac{\partial}{\partial y} G(x, y; \xi, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Aus (1.), (20.) und (21.) ergibt sich die weitere Beziehung

$$(22.)\qquad W(x,y)-\frac{1}{2\pi}\iint_T\Big[a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}G(x,y;\xi,\eta)+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}G(x,y;\xi,\eta)+c(x,y)G(x,y;\xi,\eta)\Big]W(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=f(x,y).$$

Es sei umgekehrt $W(x,y)$ die Lösung dieser Integralgleichung oder eine Lösung der zugehörigen homogenen Integralgleichung. Offenbar ist $W(x,y)$ in T und auf S abteilungsweise stetig. Die Funktion

$$(23.)\qquad u_0(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,W(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetig und wird auf S gleich Null. Aus dem auf S. 4 des ersten Teiles angegebenen Hilfssatze folgt, daß $W(x,y)$ in jedem der Gebiete, in die T durch die Unstetigkeitslinien zerlegt wird (diese Linien selbst jedesmal eingeschlossen), der *Hölder*schen Bedingung genügt. Nimmt man die etwaigen Schnitt- oder Berührungspunkte von Unstetigkeitskurven aus, so sind dem in der Einleitung gegebenen Hilfssatze zufolge die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $u_0(x,y)$ in T abteilungsweise stetig. In jedem nicht auf den Unstetigkeitslinien gelegenen Punkte (x,y) gilt die Beziehung (20.). Aus (20.), (21.) und (22.) ergibt sich schließlich

$$(24.)\qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+a\frac{\partial u_0}{\partial x}+b\frac{\partial u_0}{\partial y}+cu_0=f.$$

Es möge zunächst die erste Randwertaufgabe stets eindeutig lösbar sein. Alsdann ist die Integralgleichung (22.) gleichfalls eindeutig lösbar, $u_0(x,y)$ ist die (einzige) Lösung unseres Randwertproblems, und wir haben in (22.) ein neues Lösungsverfahren gewonnen. *Die partiellen Ableitungen* $\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}$ *sind*, wie in § 1 bereits ohne Beweis angegeben worden ist, *auch noch auf dem Rande des Gebietes stetig.*

Es sei $u(x,y)$ eine in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (1.), die auf S gleich $\varphi(s)$ wird, und es möge $\varphi(s)$ stetige Ableitung erster und stetige oder auch nur abteilungsweise stetige Ableitung zweiter Ordnung haben. Es sei wie in § 1 mit $v(x,y)$ diejenige in T reguläre Potentialfunktion bezeichnet, die auf S ebenfalls die Werte $\varphi(s)$ annimmt. Bekanntlich sind $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ auf S stetig. Wir setzen

$$u(x, y) = v(x, y) + U(x, y).$$

$U(x, y)$ ist diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + cU = f - L(v(x, y)),$$

die auf S verschwindet. Offenbar sind also $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ auf S stetig. *Also sind auch die partiellen Ableitungen* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ *auf* S *stetig.*

Es möge jetzt zweitens (1.) eine endliche Anzahl in T regulärer, auf S verschwindender Lösungen $u_1(x, y), \ldots u_k(x, y)$ haben. Es sei S'' eine stetig gekrümmte geschlossene Kurve in T, die so gewählt ist, daß im Innern des von S und S'' begrenzten ringförmigen Gebietes τ die etwaigen Unstetigkeitslinien einander weder schneiden noch berühren. Es sei $\varphi_i''(s)$ der Wert von $u_i(x, y)$ auf S''. Die Funktion $\varphi_i''(s)$, $(i = 1, \ldots n)$ hat stetige Ableitung erster Ordnung und stetige oder allenfalls abteilungsweise stetige Ableitung zweiter Ordnung. Es sei d das Maximum der Entfernung der Punkte der Kurve S'' von S. Wie in § 3 gezeigt werden wird, kann man d so klein wählen, daß in τ die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung (1.) stets eindeutig lösbar wird. Die Werte, die $u_i(x, y)$ auf dem Rande des Gebietes τ annimmt, erfüllen die Voraussetzungen des soeben bewiesenen Satzes. Also sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ auf S'' und auf S stetig.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung der etwa vorhandenen, in T *regulären, auf* S *verschwindenden Lösungen der Differentialgleichung* $L(u) = 0$ *sind auf* S *stetig.* Liegt dieser Fall vor, so liefert die zu (22.) gehörige homogene Integralgleichung *sämtliche* Lösungen des Problems.

Wir haben die Existenz der Lösung als bereits bewiesen vorausgesetzt. Es ließe sich aber diese aus (22.) auch direkt ableiten. Man könnte ferner die Voraussetzungen über die Koeffizienten von (1.) beträchtlich reduzieren. Es hätte z. B. genügt, anzunehmen, daß in jedem der Gebiete, in die T durch die Unstetigkeitskurven zerlegt wird, die Funktionen a, b, c, f stetig sind und, die Unstetigkeitskurven jedesmal eingeschlossen, die *Hölder*sche Bedingung erfüllen.

Selbstverständlich gelten die zuletzt durchgeführten Betrachtungen auch bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten.

Mit Rücksicht auf eine spätere wichtige Anwendung nehmen wir jetzt an, die Funktion $f(x, y)$ möge längs einer stetig gekrümmten Kurve $\bar{C}$ in T in einer sofort näher zu charakterisierenden Weise unendlich groß werden, im übrigen aber die vorhin aufgestellten Bedingungen erfüllen. Ist ϱ die Entfernung eines Punktes (x, y) von $\bar{C}$, so wird vorausgesetzt, daß

$$|f(x, y)| < A_8 \left| \log \frac{1}{\varrho} \right| + A_9. \tag{25.}$$

Der Einfachheit halber wollen wir übrigens annehmen, daß die Kurve $\bar{C}$ geschlossen ist*).

Betrachten wir die Integralgleichung (5.) noch einmal. Offenbar ist die Funktion

$$\iint_T G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung auf $\bar{C}$ stetig. Die Lösung $u(x, y)$ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung sind somit in T stetig. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung werden auf $\bar{C}$ unendlich groß. Man überzeugt sich leicht, daß die Formel (22.) ihre Gültigkeit behält. Die gesuchte Lösung möge insbesondere auf S verschwinden. Aus (22.) folgt, daß $W(\xi, \eta)$ auf $\bar{C}$ eine der Beziehung (25.) analoge Ungleichheit erfüllt. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sind nach (21.) auch noch auf S stetig. Das gleiche tritt ein, wenn die Randfunktion $\varphi(s)$ stetige Ableitung erster und abteilungsweise stetige Ableitung zweiter Ordnung hat.

Es sei $\varphi(s, \lambda)$ eine für alle s auf S und alle λ in dem Intervalle

$$\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1 \tag{26.}$$

stetige Funktion ihrer beiden Argumente, $u(x, y, \lambda)$ diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = f$, die auf S die Werte $\varphi(s, \lambda)$ annimmt. Aus dem am Schluß des § 1 bewiesenen Satze folgt sofort, daß $u(x, y, \lambda)$ *eine für alle* (x, y) *in* T *und auf* S *und alle* λ *in* (26.) *stetige Funktion von* x, y, λ *ist.*

Es möge jetzt die partielle Ableitung $\frac{\partial \varphi(s, \lambda)}{\partial \lambda}$ für alle vorhin betrachteten Werte von s und λ vorhanden und stetig sein. Man überzeugt sich durch eine Betrachtung, die der im ersten Teile S. 31 durchgeführten

*) Insbesondere kann $\bar{C}$ natürlich mit einer der Unstetigkeitskurven der Koeffizienten a, b, c zusammenfallen.

ganz analog ist, daß für alle (x, y) in T und auf S und alle λ in (26.) die partielle Ableitung $\frac{\partial u(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = U(x, y, \lambda)$ vorhanden und stetig ist. $U(x, y, \lambda)$ ist diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die auf S die Werte $\frac{\partial \varphi(s, \lambda)}{\partial \lambda}$ annimmt.

Für alle (x, y) im Innern von T und für $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ sind somit die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial \lambda}$$

vorhanden und in bezug auf (x, y) stetig. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^2 \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x \partial y \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^2 \partial \lambda}$$

sind in T vorhanden und in bezug auf (x, y) abteilungsweise stetig.

Analoge Sätze gelten, wenn mehrere Parameter vorliegen.

§ 3. Eindeutigkeitssätze.

In diesem Paragraphen sollen einige für das folgende wichtige Eindeutigkeitssätze abgeleitet werden. Da diese Betrachtungen den bekannten Entwicklungen bei durchweg stetigen Koeffizienten analog verlaufen, so werden wir uns kurz fassen können.

Sind die Koeffizienten der Differentialgleichung $L(u) = 0$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetig und ist $c < 0$, so hat nach einem bekannten Satze von *Paraf* eine in T reguläre Lösung daselbst weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum (selbst in weiterem Sinne). Eine in T reguläre am Rande verschwindende Lösung ist daher identisch gleich Null.

Es mögen jetzt a, b, c die in § 1 festgesetzten Eigenschaften haben und es sei $c < 0$. Wir nehmen ferner an, daß die Unstetigkeitskurven *sich im Innern von T weder schneiden noch berühren.* Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung einer in T regulären Lösung sind also daselbst abteilungsweise stetig. Es ist leicht zu zeigen, daß auch jetzt noch *positive Maxima oder negative Minima (selbst in weiterem Sinne) ausgeschlossen sind.*

Nach *Paraf* können diese höchstens auf den Unstetigkeitslinien der Koeffizienten liegen. Es möge etwa $u(x, y)$ in (x_0, y_0) ein positives Maximum haben. Wir dürfen annehmen, daß die Tangente an die Unstetig-

keitskurve in (x_0, y_0) mit den Koordinatenachsen Winkel einschließt, die von $k\frac{\pi}{2}, (k = 0, 1, 2, 3)$ verschieden sind. Dies läßt sich nötigenfalls durch eine geeignete Drehung der Koordinatenachsen erreichen. Es ist nun

$$(27.) \qquad u(x_0, y_0) > 0, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0.$$

Ferner ist, wenn h durch durchweg positive oder auch durchweg negative Werte gegen Null konvergiert,

$$(28.) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial^2 u(x_0 + h, y_0)}{\partial x_0^2} \leqq 0, \quad \lim_{h=0} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0 + h)}{\partial y_0^2} \leqq 0.$$

Die Beziehungen (27.) und (28.) sind, wie sich leicht zeigen läßt, wegen $c < 0$ nicht miteinander vereinbar.

Eine in T reguläre auf S verschwindende Lösung ist also auch jetzt noch in T identisch gleich Null.

Es möge jetzt das Vorzeichen von c beliebig sein. Die Unstetigkeitskurven mögen wie vorhin in T einander weder schneiden noch berühren. Von dem soeben abgeleiteten Ergebnis ausgehend, kann man durch genau dieselben Überlegungen wie bei durchweg stetigen Koeffizienten den folgenden Satz beweisen:

*Es läßt sich eine Zahl k angeben, so daß, wenn T^* irgend ein Gebiet in T bezeichnet, das in einen Streifen von der Breite k parallel der x- oder der y-Achse eingeschlossen werden kann, die Differentialgleichung $L(u) = 0$, außer der Null, keine in T^* reguläre auf dem Rande verschwindende Lösung hat**).

Dieser Satz wie auch der vorhergehende gelten, wie wir weiter unten zeigen werden, auch wenn die Unstetigkeitslinien einander schneiden oder berühren.

Wir betrachten jetzt einige Spezialfälle, in denen die Eindeutigkeit der Lösung sich leicht nachweisen läßt.

Die Lösung ist gewiß eindeutig, wenn das betrachtete Gebiet τ eine Kreisfläche von hinreichend kleinem Radius ϱ' ist. Dieser Satz gilt, auch wenn in τ die Unstetigkeitslinien einander schneiden oder berühren. In der Tat werden die Ausdrücke

$$\iint_\tau |G_\tau(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta, \quad \iint_\tau \left|\frac{\partial}{\partial x} G_\tau(x, y; \xi, \eta)\right| d\xi\, d\eta,$$

$$\iint_\tau \left|\frac{\partial}{\partial y} G_\tau(x, y; \xi, \eta)\right| d\xi\, d\eta,$$

*) Vgl. *Paraf*, Sur le problème de *Dirichlet* et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre, Annales de Toulouse, 1892, S. 1—75.

unter G_τ die zu τ gehörige klassische *Green*sche Funktion verstanden, mit ϱ' zugleich Null. Man kann daher eine positive Zahl ϱ_0 so klein wählen, daß für alle $\varrho' < \varrho_0$ die zu (22.) analoge dem Gebiete τ entsprechende inhomogene Integralgleichung auflösbar wird.

Es sei Σ ein Kreis in T. Sein Mittelpunkt sei (x_1, y_1), sein Halbmesser sei R. Wir beweisen, daß sich eine Zahlgröße h_0 so bestimmen läßt, daß für alle $h \leqq h_0$ die Differentialgleichung $L(u) = 0$ keine von Null verschiedene, in der von den beiden Kreisen von Halbmessern R und $R - h$ um (x_1, y_1) begrenzten Kreisringfläche Θ reguläre, auf dem Rande verschwindende Lösung hat. Es wird hierbei vorausgesetzt, daß in T die Unstetigkeitskurven einander weder schneiden noch berühren.

Durch Vermittlung der Funktion

$$Z = X + iY = \log \frac{z - z_1}{R}, \quad z = x + iy, \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

wird die Kreisringfläche Θ auf einen der Y-Achse parallelen Streifen $\bar{\Theta}$ in der Ebene (X, Y) konform abgebildet. Einer in Θ regulären Lösung $u(x, y)$ von $L(u) = 0$ entspricht vermöge der Beziehung

$$u(x, y) = U(X, Y)$$

eine reguläre, der Gleichung

$$U(X, Y + 2\pi) = U(X, Y)$$

genügende Lösung einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A_0 \frac{\partial U}{\partial X} + B_0 \frac{\partial U}{\partial Y} + C_0 U = 0.$$

Die Koeffizienten dieser Differentialgleichung sind periodische Funktionen von X und Y,

$$A_0(X, Y + 2\pi) = A_0(X, Y), \quad B_0(X, Y + 2\pi) = B_0(X, Y),$$
$$C_0(X, Y + 2\pi) = C_0(X, Y)$$

und erfüllen in der Halbebene $X \leqq 0$, die Begrenzung eingeschlossen, die in § 1 angegebenen Bedingungen. Es läßt sich, wie bei dem Beweise des vorhin an zweiter Stelle betrachteten Satzes, zeigen, daß man den Streifen $\bar{\Theta}$ so schmal annehmen kann, daß jede periodische Lösung $U(X, Y)$, falls sie auf dem Rande verschwindet, identisch gleich Null sein muß. Damit ist aber auch unsere Behauptung dargetan*).

*) In ähnlicher Weise läßt sich der auf S. 61 benutzte Eindeutigkeitssatz beweisen.

Es läßt sich schließlich unschwer zeigen, daß man (übrigens in unendlich mannigfaltiger Weise) eine Anzahl mit Σ konzentrischer Kreise $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots \Sigma_p$ von Halbmessern $R_1 > R_2 > \cdots > R_p$, $R > R_1$ angeben kann, so daß in jedem der endlichen Gebiete, die entsprechend von Σ, Σ_2; $\Sigma_1, \Sigma_3; \dots \Sigma_{p-2}, \Sigma_p; \Sigma_{p-1}$ begrenzt sind, die Differentialgleichung $L(u) = 0$ keine von Null verschiedene reguläre, auf dem Rande verschwindende Lösung hat.

§ 4. Lösungen als Funktionen der Koeffizienten.

Wir nehmen jetzt an, die nicht homogene Integralgleichung (22.) möge stets eine Lösung haben. Das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $L(u) = f$ ist alsdann eindeutig lösbar. Die Unstetigkeitskurven können dabei in T einander in einer endlichen Anzahl von Punkten schneiden oder berühren.

Neben der Differentialgleichung $L(u) = f$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$(29.) \qquad L'(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' u = f',$$

deren Koeffizienten sich in T und auf S ebenso wie a, b, c, f verhalten. Wir können ohne weiteres voraussetzen, daß die Unstetigkeitslinien der beiden Funktionensysteme zusammenfallen, da man ja beispielsweise jede Unstetigkeitslinie von a' mit zu den Unstetigkeitslinien von a rechnen kann. Wir nehmen an, daß, abgesehen höchstens von einer endlichen Anzahl zusammenhängender Flächenstücke τ_k $(k = 1, 2, \dots)$ vom Gesamtflächeninhalt δ, in T und auf S die Beziehungen

$$(30.) \quad |a(x,y) - a'(x,y)| \leqq h, \; |b(x,y) - b'(x,y)| \leqq h, \dots |f(x,y) - f'(x,y)| \leqq h$$

bestehen. Ist nun $h \leqq h_0$, $\delta \leqq \delta_0$, unter h_0 und δ_0 positive, hinreichend kleine Zahlgrößen verstanden, so ist die zu (29.) gehörige (22.) analoge nicht homogene Integralgleichung stets eindeutig lösbar.

Der Beweis wäre etwa wie folgt zu führen. Man geht von der Integralgleichung (22.) zu der durch zweimalige Iteration sich ergebenden äquivalenten Integralgleichung über. Der Nenner D des zugehörigen *Fredholm*schen Quotienten ist von Null verschieden. Der Ausdruck D', den man erhält, wenn man in D für a, b, c die Funktionen a', b', c' setzt, konvergiert, wie sich leicht zeigen läßt, für $\delta = 0$, $h = 0$ gegen D,

$$\lim_{\substack{\delta=0\\h=0}} D' = D. \tag{31.}$$

Für alle hinreichend kleinen Werte von h und δ ist offenbar $D' \neq 0$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir wählen jetzt $h \leqq h_0$, $\delta \leqq \delta_0$ und bezeichnen mit $u(x, y)$ und $u'(x, y)$ diejenigen in T regulären Lösungen der Differentialgleichungen (1.) und (29.), die auf S verschwinden. Aus den Formeln (21.) und (22.) läßt sich nun unter Zuhilfenahme der bekannten *Fredholm*schen Auflösungsformel unschwer ableiten, daß für alle (x, y) in T und auf S

$$\lim_{\substack{\delta=0\\h=0}} u'(x, y) = u(x, y), \quad \lim_{\substack{\delta=0\\h=0}} \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\substack{\delta=0\\h=0}} \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{32.}$$

Der Grenzübergang ist gleichmäßig.

Es ist leicht einzusehen, daß die gleichen Beziehungen bestehen, wenn die Lösungen $u(x, y)$ und $u'(x, y)$ auf S nicht verschwinden, sondern gleich $\varphi(s)$ werden, unter $\varphi(s)$ eine Funktion, die stetige Ableitung erster und stetige oder auch nur abteilungsweise stetige Ableitung zweiter Ordnung hat, verstanden. Es sei $v(x, y)$ diejenige in T reguläre Potentialfunktion, die auf S gleich $\varphi(s)$ wird. Setzt man wie in § 2

$$u(x, y) = U(x, y) + v(x, y),$$

so genügt $U(x, y)$ der Differentialgleichung

$$L(U(x, y)) = f(x, y) - L(v(x, y))$$

und ist auf S gleich Null. Damit ist dieser Fall auf den vorhin erledigten zurückgeführt.

Es möge jetzt die Randfunktion $\varphi(s)$ schlechthin stetig sein. Es sei $\varphi_*(s)$ eine analytische, periodische Funktion, die so gewählt ist, daß

$$|\varphi(s) - \varphi_*(s)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

unter ε eine beliebig kleine positive Zahlgröße verstanden.

Sind $u_*(x, y)$ und $u'_*(x, y)$ die zu $\varphi_*(s)$ gehörigen Lösungen der Differentialgleichungen (1.) und (29.), so ist nach einem in § 1 bewiesenen Satze für alle (x, y) in T und auf S

$$|u(x, y) - u_*(x, y)| < \nu, \quad |u'(x, y) - u'_*(x, y)| < \nu, \tag{33.}$$

unter ν eine positive mit ε gegen Null konvergierende Zahl verstanden. Man kann nun die Werte h und δ so klein annehmen, etwa

$$h < h' \leqq h_0, \quad \delta < \delta' \leqq \delta_0,$$

daß für alle (x, y) in T und auf S

$$(34.)\quad \begin{gathered} |u_*(x,y) - u'_*(x,y)| < \nu_1, \quad \left|\frac{\partial u_*(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u'_*(x,y)}{\partial x}\right| < \nu_1, \\ \left|\frac{\partial u_*(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u'_*(x,y)}{\partial y}\right| < \nu_1, \quad \lim_{\substack{\delta=0\\ h=0}} \nu_1 = 0. \end{gathered}$$

Aus (33.) und (34.) folgt nunmehr für alle (x, y) in T und auf S

$$(35.)\quad |u(x,y) - u'(x,y)| < \nu_2, \quad \lim_{\substack{\delta=0\\ h=0}} \nu_2 = 0.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir jetzt an, die Koeffizienten der Differentialgleichungen (1.) und (29.) seien durchweg stetig. Es sei ferner T' wie in § 1 irgend ein Gebiet im Innern von T. Man kann alsdann leicht zeigen, daß für alle (x, y) in T'

$$(36.)\quad \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u_*(x,y)}{\partial x}\right| < \nu_3, \ldots \left|\frac{\partial u'(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u'_*(x,y)}{\partial y}\right| < \nu_3, \quad \lim_{\varepsilon=0} \nu_3 = 0^{*)}.$$

Hieraus und aus (34.) folgt in T'

$$(37.)\quad \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u'(x,y)}{\partial x}\right| < \nu_4, \quad \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u'(x,y)}{\partial y}\right| < \nu_4, \quad \lim_{\substack{\delta=0\\ h=0}} \nu_4 = 0.$$

Es sei jetzt eine Differentialgleichung

$$(38.)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y,\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,\lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,\lambda)\,u = f(x,y,\lambda)$$

vorgelegt. Ihre Koeffizienten mögen für alle (x, y) in T und auf S und für alle λ in dem Intervalle

$$(39.)\quad \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$$

stetig sein und stetige partielle Ableitungen in bezug auf x und y haben. Wir nehmen ferner an, daß für alle λ in (39.) die Differentialgleichung (38.), außer der Null, keine auf S verschwindende in T reguläre Lösung hat. Es sei $\varphi(s)$ eine schlechthin stetige Funktion auf S und $u(x, y, \lambda)$ diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (38.), die auf S gleich $\varphi(s)$ wird. Aus den soeben durchgeführten Betrachtungen ergibt sich unmittelbar der Satz:

Die Lösung $u(x, y, \lambda)$ ist für alle (x, y) in T und auf S und alle λ in dem Intervalle (λ_1, λ_2) eine stetige Funktion ihrer drei Argumente. Für alle (x, y) in jedem Gebiete T' und für $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x,y,\lambda)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y,\lambda)}{\partial y}$ stetige Funktionen von x, y und λ.

---

*) Es folgt dies zum Beispiel aus der Formel (30.) des ersten Teiles dieser Arbeit.

§ 5. Eindeutigkeitssätze (Fortsetzung).

Wir haben vorhin bewiesen, daß, sofern durchweg $c < 0$ ist, die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung (1.) gewiß eindeutig lösbar ist. Dabei haben wir die spezielle Annahme gemacht, daß in T die Unstetigkeitslinien der Koeffizienten einander weder schneiden noch berühren. Diese Voraussetzung können wir nunmehr fallen lassen.

Der Koordinatenursprung sei etwa ein Punkt in T, durch den zwei oder mehr Unstetigkeitslinien hindurchgehen, und es sei $u(x, y)$ eine von Null verschiedene reguläre Lösung von $L(u) = 0$, die auf S verschwindet. Sie nimmt in T gewiß entweder ein positives Maximum oder ein negatives Minimum oder auch beides an. Diese Werte kann $u(x, y)$ dem in § 3 bewiesenen Satze zufolge, höchstens in einem Kreuzungspunkte mehrerer Unstetigkeitskurven annehmen. Es sei etwa $u(0, 0)$ ein positives Maximum (zugleich der Höchstwert von $u(x, y)$ in T und auf S). Um $(0, 0)$ beschreiben wir einen Kreis Γ. Sein Halbmesser wird so klein gewählt, daß die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in dem von Γ begrenzten Gebiete K eindeutig lösbar wird.

Der Wert von $u(x, y)$ auf Γ sei mit $\psi(s)$ bezeichnet. Offenbar ist

$$\text{Max } \psi(s) \leqq u(0, 0). \tag{40.}$$

Es sei $a_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von Polynomen, die für $k = \infty$ in jedem die Unstetigkeitskurven nicht enthaltenden Teile von T gegen $a(x, y)$ gleichmäßig konvergieren und für alle k einer Beziehung

$$|a_k(x, y)| < A_{10}$$

genügen. In analoger Weise werden Polynome $b_k(x, y)$ und $c_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eingeführt. Für alle hinreichend großen Werte von k soll

$$c_k(x, y) < 0$$

sein. Es sei $u_k(x, y)$ diejenige in K reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} + a_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_k \frac{\partial u_k}{\partial y} + c_k u_k = 0,$$

die auf Γ gleich $\psi(s)$ wird. Offenbar ist für alle k im Innern von K

$$u_k(x, y) < \text{Max } \psi(s).$$

Nach § 4 ist

$$\lim_{k=\infty} u_k(x, y) = u(x, y),$$

daher in K

$$u(x, y) \leqq \text{Max } \psi(s)$$

und insbesondere

(41.) $$u(0, 0) \leqq \text{Max } \psi(s).$$

Aus (40.) und (41.) ergibt sich

$$u(0, 0) = \text{Max } \psi(s).$$

Es seien Γ_1 und Γ_2 zwei mit Γ konzentrische Kreise im Innern von K und es möge etwa Γ_1 in dem von Γ und Γ_2 begrenzten Kreisringe liegen. Sind $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ die Werte von $u(x, y)$ auf Γ_1 und Γ_2, so findet man in ähnlicher Weise

(42.) $$u(0, 0) = \text{Max } \psi_1(s) = \text{Max } \psi_2(s) = \text{Max } \psi(s).$$

Wir wählen Γ_1 und Γ_2 so, daß in dem von den Kreisen Γ und Γ_2 begrenzten ringförmigen Gebiete kein Schnittpunkt der Unstetigkeitskurven liegt. Die Beziehung (42.) widerspricht alsdann dem in § 3 bewiesenen Satze. *Eine in T reguläre, auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ ist in T identisch gleich Null.*

Man überzeugt sich nunmehr ohne Mühe, daß *sämtliche Ergebnisse des* § 3 *in dem jetzt betrachteten allgemeinen Falle beliebig gelegener Unstetigkeitskurven ihre Gültigkeit behalten.*

§ 6. Die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion.

Den folgenden Überlegungen legen wir das in § 1 betrachtete Gebiet T zugrunde. Den an jener Stelle eingeführten Voraussetzungen fügen wir zur Vereinfachung die weitere Annahme hinzu, daß $\frac{\partial a}{\partial x}$ und $\frac{\partial b}{\partial y}$ im Innern und auf dem Rande jedes der beiden Gebiete, in die T durch C geteilt wird, der *Hölder*schen Bedingung genügen.

Neben der Differentialgleichung $L(u) = 0$ betrachten wir die zu ihr adjungierte Differentialgleichung

(43.) $$M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) u = 0.$$

Es sei (X, Y) irgend ein Punkt in T. Wir nehmen an, daß in T die erste Randwertaufgabe sowohl für $L(u) = 0$ als auch für $M(u) = 0$ eindeutig lösbar ist, und bezeichnen die am Rande verschwindenden *Green*schen Funktionen dieser beiden Differentialgleichungen entsprechend mit $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ und $\mathfrak{H}(X, Y; x, y)$. Die Bestimmung dieser Funktionen

macht keine Schwierigkeiten. Am besten benutzt man hierbei das in § 2 angegebene Verfahren. Man setzt etwa

$$\begin{aligned} &\mathfrak{G}(X, Y; x, y) = G(X, Y; x, y) + \mathfrak{U}(x, y), \\ &\mathfrak{U}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T G(x, y; \xi, \eta)\, \mathfrak{W}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \end{aligned} \tag{44.}$$

und erhält zur Bestimmung von $\mathfrak{W}(x, y)$ die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint_T \Big[a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} G(x, y; \xi, \eta) + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} G(x, y; \xi, \eta) \\ + c(x, y)\, G(x, y; \xi, \eta) \Big] \mathfrak{W}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = -L(G(X, Y; x, y)). \end{aligned} \tag{45.}$$

Man findet so zugleich, daß $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}$ und natürlich auch $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}$ auf S stetig sind. Es sei

$$\mathfrak{G}(X, Y; x, y) = \tfrac{1}{2} \log [(X-x)^2 + (Y-y)^2]^{-1} + \gamma(X, Y; x, y)$$

gesetzt. Für alle nicht zusammenfallenden (X, Y) und (x, y) in T und auf S bestehen die Beziehungen

$$|\mathfrak{W}(x, y)| < A_{11} [(X-x)^2 + (Y-y)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad |\mathfrak{U}(x, y)| < A_{12},$$
$$\left|\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\right| < A_{13} |\log \{(X-x)^2 + (Y-y)^2\}| + A_{14}.$$

Hieraus sowie aus (44.) findet man leicht weiter

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{G}(X, Y; x, y)| < \tfrac{1}{2} |\log \{(X-x)^2 + (Y-y)^2\}| + A_{15}, \\ &\left|\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}\right| < A_{16} \{(X-x)^2 + (Y-y)^2\}^{-\frac{1}{2}} + A_{17} |\log \{(X-x)^2 + (Y-y)^2\}|. \end{aligned} \tag{46.}$$

Analoge Beziehungen gelten, wie wir wissen, bei durchweg stetigen Koeffizienten.

Es mögen jetzt $w_1(x, y)$ und $w_2(x, y)$ Funktionen bezeichnen, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung sich in T und auf S stetig verhalten. Ihre partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind in T_1' und T_2' stetig. Sowohl für T_1' als auch für T_2' gilt die bekannte *Green*sche Formel. Aus einer Verknüpfung der beiden Formeln ergibt sich die weitere Beziehung

$$\begin{aligned} \iint_T [w_1 L(w_2) - w_2 M(w_1)]\, d\xi d\eta = -\int_S \left[w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} - w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n} \right] ds \\ + \int_S w_1 w_2 (a\, d\eta - b\, d\xi) - \int_C w_1 w_2 (\delta a\, d\eta - \delta b\, d\xi). \end{aligned} \tag{47.}$$

Hierin bezeichnet (n) die nach dem Innern von T gerichtete Normale von S.

Bei der Integration längs C bleibt T_1 links zur Fortschreitungsrichtung liegen.

Es seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei von einander verschiedene Punkte in T. Führt man in (47.) für $w_1(\xi, \eta)$ und $w_2(\xi, \eta)$ entsprechend $\mathfrak{H}(x_1, y_1; \xi, \eta)$ und $\mathfrak{G}(x_2, y_2; \xi, \eta)$ ein, so erhält man die Beziehung

$$\mathfrak{G}(x_2, y_2; x_1, y_1) - \mathfrak{H}(x_1, y_1; x_2, y_2) = - \frac{1}{2\pi} \int_C \mathfrak{H}(x_1, y_1; \xi, \eta)\, \mathfrak{G}(x_2, y_2; \xi, \eta)\, (\delta a\, d\eta - \delta b\, d\xi). \tag{48.}$$

Diese Formel tritt an Stelle der bekannten Reziprozitätsbeziehung ein.

Es sei jetzt $u(x, y)$ diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = f(x, y)$, die auf S den Wert $\varphi(s)$ annimmt. Von der Funktion $\varphi(s)$ wird vorausgesetzt, daß sie stetige Ableitung erster und zweiter Ordnung hat. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sind in T und auf S stetig. Setzt man in (47.) für $w_1(\xi, \eta)$ und $w_2(\xi, \eta)$ entsprechend $\mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta)$ und $u(\xi, \eta)$ ein, so erhält man in bekannter Weise

$$\begin{aligned} u(X, Y) = &- \frac{1}{2\pi} \int_C \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, (\delta a\, d\eta - \delta b\, d\xi) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}(X, Y; t)\, \varphi(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{49.}$$

Diese Beziehung ist zunächst für alle Funktionen $\varphi(s)$ abgeleitet worden, die stetige Ableitung erster und zweiter Ordnung haben. *Sie gilt indessen,* wie wir gleich sehen werden, *für alle abteilungsweise stetigen* $\varphi(s)$.

Es sei $\varphi^{(1)}(s), \varphi^{(2)}(s), \ldots$ eine unendliche Folge analytischer, periodischer Funktionen, die in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von S gegen $\varphi(s)$ gleichmäßig konvergieren und überdies einer Beziehung von der Form

$$|\varphi^{(k)}(s)| < A_{18}, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{50.}$$

genügen. Es seien $u^{(1)}(x, y), u^{(2)}(x, y), \ldots$ diejenigen beschränkten, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = f$, die auf dem Rande die Werte $\varphi^{(1)}(s), \varphi^{(2)}(s), \ldots$ annehmen. Nach (49.) ist

$$\begin{aligned} u^{(k)}(X, Y) = &\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}(X, Y; t)\, \varphi^{(k)}(t)\, dt \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_C \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta)\, u^{(k)}(\xi, \eta)\, (\delta a\, d\eta - \delta b\, d\xi) \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{51.}$$

Den Entwicklungen von § 1 gemäß konvergiert $u^{(k)}(x, y)$ in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von T gleichmäßig gegen $u(x, y)$,

$$\lim_{k=\infty} u^{(k)}(x, y) = u(x, y). \tag{52.}$$

Überdies ist, wie aus (5.) geschlossen werden kann,

$$|u^{(k)}(x, y)| < A_{19}. \tag{53.}$$

Aus (51.), (52.) und (53.) folgt, wie behauptet,

$$\begin{aligned} u(X, Y) = &\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(X, Y; t)\varphi(t)\,dt \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_C \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\,(\delta a\, d\eta - \delta b\, d\xi) \\ &- \frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{54.}$$

Fällt insbesondere (X, Y) in einen Punkt $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ auf C hinein, so erhält man

$$\begin{aligned} u(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = &\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; t)\,\varphi(t)\,dt \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_C \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\,(\delta a\, d\eta - \delta b\, d\xi) \\ &- \frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{55.}$$

Analoge Beziehungen gelten, wenn in T mehrere Unstetigkeitslinien vorliegen. Auch darf natürlich T mehrfach zusammenhängend sein.

Die Beziehung (55.) ist eine lineare Integralgleichung, die zur Bestimmung von $u(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ bei gegebenem $\varphi(s)$ benutzt werden könnte. Die Gleichung (54.) würde sodann den Wert der Lösung $u(x, y)$ überall in T ergeben. Der Kern $\mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\left(\delta a \frac{d\eta}{dt} - \delta b \frac{d\xi}{dt}\right)$ wird für $\bar{\xi} = \xi, \bar{\eta} = \eta$ logarithmisch unendlich. Wir fassen $u(x, y)$ als bekannt auf und ziehen aus (55.) zuerst die Folgerung, daß die Funktion $\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; t)\varphi(t)dt$ sich für alle $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ auf C stetig verhält*).

Die nicht homogene Integralgleichung (55.) ist stets auflösbar. Dies kann man so zeigen. Es möge entgegen unserer Behauptung die zu (55.) gehörige homogene Integralgleichung lösbar sein, und es mögen $w^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$,

*) Fällt ein Endpunkt von C mit einem Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ zusammen, so ist daselbst das betrachtete Integral jedenfalls beschränkt.

$(i = 1, 2, \ldots p)$ die Nulllösungen der zu ihr adjungierten Integralgleichung sein. Man kann dann gewiß eine stetige Funktion $f(\xi, \eta)$ angeben, die so beschaffen ist, daß die Ausdrücke

$$\int_C w^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\, d\bar{t} \iint_T \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_T f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_C \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\, w^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\, d\bar{t} \tag{56.}$$

nicht sämtlich verschwinden. Die zugehörige auf S verschwindende Lösung $U(x, y)$ der Differentialgleichung $L(u) = f$ würde der Gleichung

$$U(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)(\delta a\, d\eta - \delta b\, d\xi) - \frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

genügen, was der Voraussetzung widerspricht.

Diese Überlegungen würden versagen, wenn

$$\int_C \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta) w^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\, d\bar{t} \equiv 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

wäre. Dies kann jedoch nicht eintreten. Denn aus der Integralgleichung

$$w^{(i)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \mathfrak{H}(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\left[\delta a \frac{d\eta}{dt} - \delta b \frac{d\xi}{dt}\right] w^{(i)}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\, d\bar{t},$$

der $w^{(i)}(\xi, \eta)$ genügt, würde alsdann

$$w^{(i)}(\xi, \eta) \equiv 0$$

folgen.

Betrachten wir die Beziehung (48.) und nehmen wir an, daß (x_1, y_1) in einen Punkt s auf C fällt. Es sei ferner t der Punkt (ξ, η) auf C. Wir finden die lineare Integralgleichung

$$\mathfrak{G}(x_2, y_2; s) - \mathfrak{H}(s; x_2, y_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \mathfrak{G}(x_2, y_2; t)\, \mathfrak{H}(s, t)\left[\delta a \frac{d\eta}{dt} - \delta b \frac{d\xi}{dt}\right] dt. \tag{57.}$$

Ist $\mathfrak{H}^*(s, t)$ der zu $\frac{1}{2\pi}\mathfrak{H}(s, t)\left[\delta a \frac{d\eta}{dt} - \delta b \frac{d\xi}{dt}\right]$ gehörige lösende Kern, so erhält man aus (57.) die weitere Beziehung

$$\mathfrak{G}(x_2, y_2; s) = \mathfrak{H}(s; x_2, y_2) - \int_C \mathfrak{H}^*(s, t)\, \mathfrak{H}(t; x_2, y_2)\, dt. \tag{58.}$$

Aus dieser Formel folgt, wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten zeigen läßt, daß $\mathfrak{G}(x_2, y_2; s)$ als Funktion von (x_2, y_2) aufgefaßt, für alle (x_2, y_2) in T, außer auf C, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$M(\mathfrak{G}(x_2, y_2; s)) = 0$$

genügt. Aus der Beziehung (48.) folgt nunmehr, daß $\mathfrak{G}(x_2, y_2; x_1, y_1)$, *als Funktion von* (x_2, y_2) *aufgefaßt, für alle* (x_1, y_1) *in* T *und alle* (x_2, y_2) *in jedem der beiden Gebiete, in die* T *durch* C *geteilt wird, außer für* $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, *stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung*

$$M(\mathfrak{G}(x_2, y_2; x_1, y_1)) = 0 \tag{59.}$$

genügt.

Es möge jetzt wieder (x_1, y_1) mit dem Punkte s von C zusammenfallen. Bei dem Durchgang des Punktes (x_2, y_2) durch C ändert sich die Normalableitung der Funktion $\mathfrak{G}(x_2, y_2; s)$ sprungweise. In der Umgebung des Punktes (x_1, y_1) werden $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_2}$ von der ersten Ordnung unendlich groß.

Nach bekannten Sätzen über das Potential einer einfachen Linienbelegung erhält man aus (58.) für den Sprung der Normalableitung von $\mathfrak{G}$ in demjenigen Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ auf C, dem der Wert σ der Bogenlänge entspricht, die Formel

$$\frac{\partial}{\partial n_2}\mathfrak{G}(\bar{x}, \bar{y}; s) + \frac{\partial}{\partial n_1}\mathfrak{G}(\bar{x}, \bar{y}; s) = 2\pi \mathfrak{H}^*(s, \sigma).^*) \tag{60.}$$

In analoger Weise erhält man die weitere Formel

$$\frac{\partial}{\partial n_2}\mathfrak{H}(\bar{x}, \bar{y}; s) + \frac{\partial}{\partial n_1}\mathfrak{H}(\bar{x}, \bar{y}; s) = 2\pi \mathfrak{G}^*(s, \sigma). \tag{61.}$$

$\mathfrak{G}^*(s, t)$ ist der zu $-\frac{1}{2\pi}\mathfrak{G}(s, t)\left[\delta a \frac{d\eta}{dt} - \delta b \frac{d\xi}{dt}\right]$ gehörige lösende Kern. Nähert sich (x_2, y_2) dem Rande S von T, so wird, wie aus (58.) mit Rücksicht auf die Formeln (42.) und (43.) folgt,

$$\lim \mathfrak{G}(x_2, y_2; s) = 0. \tag{62.}$$

Der Grenzübergang ist für alle (x_2, y_2) auf S und alle s in jedem die Randpunkte nicht enthaltenden Teile von C gleichmäßig.

Aus (48.) ergibt sich, wenn man die Formel (62.) berücksichtigt, nunmehr für alle (x_1, y_1) in T

$$\lim \mathfrak{G}(x_2, y_2; x_1, y_1) = 0. \tag{63.}$$

Für alle (x_1, y_1) in jedem ganz im Innern von T enthaltenen Gebiete ist der Grenzübergang gleichmäßig.

---

*) Die Symbole $\frac{\partial}{\partial n_2}$ und $\frac{\partial}{\partial n_1}$ bezeichnen die partiellen Ableitungen in der Richtung der Innennormale von T_2 bzw. T_1 im Punkte σ auf C.

Der Einfachheit halber nehmen wir jetzt die Kurve C geschlossen an und bezeichnen mit T_1 denjenigen der beiden Teilbereiche von T, der einfach zusammenhängend ist. Es sei (N_2) irgend eine Normale an C, (n) eine beliebige Normale an S. Es sei ferner $\bar{C}$ irgend eine C umschließende, geschlossene, stetig gekrümmte Kurve in T_2, Θ' und Θ'' die von C und $\bar{C}$ bzw. $\bar{C}$ und S begrenzten Gebiete, (X, Y) ein Punkt im Innern von Θ' oder auf C. Die *Green*sche Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ ist, als Funktion von (x, y) betrachtet, eine in Θ'' reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$. Sie nimmt auf $\bar{C}$ eine gewisse stetige Wertfolge $\gamma_0(X, Y; x, y)$ an und ist auf S gleich Null. Wie sich aus (58.) und (48.) folgern läßt, ist $\frac{\partial \gamma_0}{\partial N_2}$ für alle (X, Y) in Θ' und auf C und für alle (x, y) auf $\bar{C}$ vorhanden und stetig. Dem am Schluß des § 2 abgeleiteten Satze zufolge ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial n \partial N_2} \mathfrak{G}(X, Y; x, y)$$

für alle (X, Y) in Θ' und auf C und alle (x, y) im Innern von Θ'' und auf S vorhanden und stetig. Da $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n}$ und $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial N_2}$ für alle diese Werte von (X, Y) und (x, y) existieren und stetig sind, so ist nach einem Satze von Herrn *H. A. Schwarz* auch $\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial N_2 \partial n}$ vorhanden und stetig und es ist

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial N_2 \partial n} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial n \partial N_2}. \quad (64.)$$ *)

Für eine spätere Anwendung genügt es übrigens zu wissen, daß die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial N_2 \partial n}$ für alle (X, Y) auf C und alle (x, y) auf S existiert und sich stetig verhält.

§ 7. Asymptotisches Verhalten der *Green*schen Funktion am Rande des Gebietes.

Den Betrachtungen dieses Paragraphen legen wir folgende Voraussetzungen zugrunde. *Das Gebiet T ist der Einheitskreis um den Koordinatenursprung.* Die Koeffizienten der Differentialgleichung (1.) sind in T und

*) Vgl. *H. A. Schwarz*, Über ein vollständiges System von einander unabhängiger Voraussetzungen zum Beweise des Satzes $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$, Ges. Math. Abh., Bd. II, S. 275—284.

auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung *stetig*. Es gibt, außer der Null, keine in T reguläre, auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$.

Es sei $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ die zu T gehörige *Green*sche Funktion dieser Differentialgleichung. Wir wollen das Verhalten von $\mathfrak{G}$ studieren, wenn *sowohl der Aufpunkt als auch das Argument sich dem Rande nähern.* Es kann insbesondere auch der Fall eintreten, daß (X, Y) *und* (x, y) *gegen denselben Punkt von* S *konvergieren.*

Wir setzen die Lösung $\mathfrak{G}$ *dadurch jenseits des Kreises fort, daß wir ihr in den in bezug auf* S *konjugierten Punkten jedesmal entgegengesetzt gleiche Werte erteilen.*

Es seien (x, y) und (X_1, Y_1) irgendwelche Punkte außerhalb T und (x_0, y_0) und (X_0, Y_0) die hierzu konjugierten Punkte. Wir setzen

$$\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y) = -\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x_0, y_0). \tag{65.}$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y)$ für alle (x, y) außerhalb T, außer für $x = X_1$, $y = Y_1$, der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x}[a(x_0, y_0)(y_0^2 - x_0^2) - 2b(x_0, y_0)x_0 y_0] \\ + \frac{\partial u}{\partial y}[-2a(x_0, y_0)x_0 y_0 + b(x_0, y_0)(x_0^2 - y_0^2)] + c(x_0, y_0)(x_0^2 + y_0^2)^2 u = 0\end{aligned} \tag{66.}$$

genügt. Es möge jetzt der Punkt (x, y) völlig willkürlich sein.

Setzt man in T

$$a_0(x, y) = a(x, y),\ b_0(x, y) = b(x, y),\ c_0(x, y) = c(x, y), \tag{67.}$$

außerhalb T, *kürzer in* $\bar{T}$,

$$\begin{aligned} a_0(x, y) &= a(x_0, y_0)(y_0^2 - x_0^2) - 2b(x_0, y_0)x_0 y_0, \\ b_0(x, y) &= -2a(x_0, y_0)x_0 y_0 + b(x_0, y_0)(x_0^2 - y_0^2), \\ c_0(x, y) &= c(x_0, y_0)(x_0^2 + y_0^2)^2, \end{aligned} \tag{68.}$$

so genügt $\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y)$ *überall, außer in den beiden Punkten* (X_0, Y_0), (X_1, Y_1) *und auf* S, *der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + b_0 \frac{\partial u}{\partial y} + c_0 u = 0. \tag{69.}$$

Die Koeffizienten a_0, b_0, c_0 sind nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und $\bar{T}$, die Begrenzung inbegriffen, stetig und *ändern sich auf* S *sprungweise.* Die Ableitung in der Richtung der Innennormale $\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y)$ ist, wie wir wissen, auf S vorhanden und stetig. Aus

(65.) folgt, da $\mathfrak{G}$ auf S verschwindet, daß $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n}$ sich beim Durchgang durch S stetig ändert. Aus den Entwicklungen in § 1 folgt, daß $\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y)$ *eine in der ganzen Ebene, außer in* (X_0, Y_0) *und* (X_1, Y_1), *reguläre Lösung der Differentialgleichung* (69.) *darstellt.* Insbesondere sind $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}$, außer in diesen beiden Punkten, stetig. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial y^2}$ ändern sich auf S sprungweise.

Es sei D ein mit S konzentrischer Kreis im Innern von T und Θ das von S und D begrenzte Kreisringgebiet. Ist die Entfernung der beiden Kreise hinreichend klein, so existiert die zu Θ gehörige *Green*sche Funktion $\mathfrak{G}_\theta$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$. Es sei D_1 der zu D in bezug auf S konjugierte Kreis und Θ' das von D und D_1 begrenzte Ringgebiet. Wir setzen schließlich, unter (x_0, y_0) vorübergehend irgend einen Punkt in Θ, unter (x, y) den hierzu konjugierten Punkt verstanden,

$$\mathfrak{G}_\theta(X_0, Y_0; x, y) = -\mathfrak{G}_\theta(X_0, Y_0; x_0, y_0).$$

Aus den vorhin durchgeführten Überlegungen folgt, daß $\mathfrak{G}_\theta(X_0, Y_0; x, y)$ diejenige in Θ', außer in den Punkten (X_0, Y_0) und (X_1, Y_1), reguläre Lösung der Differentialgleichung (69.) ist, die auf D und D_1 verschwindet und in den ausgeschlossenen Punkten sich entsprechend wie

$$-\tfrac{1}{2}\log|(X_0 - x)^2 + (Y_0 - y)^2| \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\log|(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2|$$

verhält. Wir wählen die Entfernung des Kreises D von S so klein, daß in Θ' die *Green*sche Funktion $\mathfrak{G}'$ von (69.) existiert. Offenbar ist

$$(70.) \quad \mathfrak{G}_\theta(X_0, Y_0; x, y) = \mathfrak{G}'(X_0, Y_0; x, y) - \mathfrak{G}'(X_1, Y_1; x, y).$$

Es sei D_2 ein mit S konzentrischer Kreis im Innern von Θ und Θ_2 das von D_2 und S begrenzte Gebiet. Für alle (X_0, Y_0) und (x, y) im Innern von Θ_2 erhält man schließlich für die *Green*sche Funktion $\mathfrak{G}$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$ den Ausdruck

$$(71.) \quad \mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y) = \mathfrak{G}'(X_0, Y_0; x, y) - \mathfrak{G}'(X_1, Y_1; x, y) + \gamma(X_0, Y_0; x, y),$$

unter γ eine für alle (x, y) in Θ_2 reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ verstanden. Die Funktion $\gamma(X_0, Y_0; x, y)$ ist für alle (X_0, Y_0) und (x, y) im Innern und auf dem Rande von Θ_2 stetig. Für (71.) können wir auch setzen

$$(72.) \quad \mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y) = \log\frac{\varrho_1}{\varrho} + \gamma_1(X_0, Y_0; x, y), \qquad \begin{aligned} \varrho^2 &= (X_0 - x)^2 + (Y_0 - y)^2, \\ \varrho_1^2 &= (X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2, \end{aligned}$$

worin $\gamma_1(X_0, Y_0; x, y)$ eine für alle (X_0, Y_0) und (x, y) im Innern und auf dem Rande von Θ_2 stetige Funktion bezeichnet.

Die Beziehungen (71.) und (72.) stellen eine Verallgemeinerung der bekannten Formeln für die klassische *Green*sche Funktion eines Kreisgebietes dar. Sie geben Aufschluß über das asymptotische Verhalten der *Green*schen Funktion, wenn der Aufpunkt und das Argument sich gleichzeitig dem Rande nähern.

Aus (71.) erhalten wir, wenn wir die bekannten Eigenschaften der *Green*schen Funktion der Differentialgleichung (69.) im Innern des Gebietes Θ' berücksichtigen, für alle $(X_0, Y_0), (x, y)$ im Innern und auf dem Rande von Θ_2 die Beziehung

$$(73.)\quad \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{\varrho_1}{\varrho}\Big) + \gamma_2(X_0, Y_0; x, y)\log\frac{1}{\varrho} + \gamma_3(X_0, Y_0; x, y)\log\frac{1}{\varrho_1} + \gamma_4(X_0, Y_0; x, y).$$

Die Funktionen $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ genügen für alle (X_0, Y_0) und (x, y) in Θ_2 und auf S einer Ungleichheitsbeziehung

$$|\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4| < A_{20}.$$

Analoge Beziehungen gelten für die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y)$. Diese Betrachtungen ließen sich weiter fortspinnen und dazu benutzen, das Verhalten der Ableitungen höherer Ordnung von $\mathfrak{G}$ zu studieren. Wir sehen hiervon indessen ab und bemerken nur, daß die Ergebnisse dieses Paragraphen sich im wesentlichen auf den Fall übertragen lassen, wenn *das vorgelegte einfach zusammenhängende Gebiet von einer beliebigen stetig gekrümmten Kurve begrenzt ist.* Bildet man nämlich unser Gebiet auf den Einheitskreis konform ab, so geht die zugehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung (1.) in die zu dem Einheitskreise gehörige *Green*sche Funktion einer ganz analogen Differentialgleichung über.

Von der Formel (71.) ausgehend, kann man direkt zeigen, daß der Wert, dem der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(x, y; t)\,\varphi(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\,f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

zustrebt, wenn (x, y) sich einem Stetigkeitspunkte s von $\varphi(s)$ nähert, gleich $\varphi(s)$ ist.

Kapitel II. Das zweite Randwertproblem.

§ 1. Reguläre Lösungen.

Es sei Σ eine geschlossene, stetige, doppelpunktlose Kurve in der Ebene der Variabeln (X, Y) und Θ das von ihr begrenzte endliche Gebiet. Es seien σ die Bogenlänge der Linie Σ und $X = X(\sigma)$, $Y = Y(\sigma)$ ihre Gleichungen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß die Funktionen $X(\sigma)$ und $Y(\sigma)$ stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen haben.

Es sei eine Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \bar{L}(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A\frac{\partial U}{\partial X} + B\frac{\partial U}{\partial Y} + CU = F$$

vorgelegt. Ihre Koeffizienten sind in Θ und auf Σ stetig. Die Funktionen A und B haben in Θ und auf Σ stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung, C und F diejenigen der ersten Ordnung.

Es ist diejenige beschränkte, in Θ reguläre Lösung $U(X, Y)$ von (1.) *zu bestimmen, deren Normalableitung auf Σ eine vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Wertfolge $\gamma(\sigma)$ annimmt*).*

Es sei $Z = X + iY$ und es sei

$$(2.) \qquad x + iy = z = z(Z) = x(X, Y) + iy(X, Y)$$

eine analytische Funktion, durch deren Vermittlung das Gebiet Θ auf den Einheitskreis T der Ebene (x, y) konform abgebildet werden kann. Nach bekannten Sätzen sind die Ableitungen $\frac{dz}{dZ}$, $\frac{d^2z}{dZ^2}$ auf Σ stetig, $\frac{dz}{dZ}$ ist

---

*) Um die Aufgabe zu einer völlig bestimmten zu machen, fügen wir noch folgende Festsetzungen hinzu:

Für alle (X, Y) in Θ soll

$$(3.) \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial X}\right| + \left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right| < A_{20}|\log R^*| + A_{21}$$

sein, unter R^* die Entfernung des Punktes (X, Y) von Σ verstanden. Es sei (N) eine Normale von Σ. Die partielle Ableitung $\frac{\partial U}{\partial N}$ ist beschränkt und konvergiert bei der Annäherung an den Rand in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\gamma(\sigma)$ nicht enthaltenden Teile von Σ gegen ihren Grenzwert in gleichem Grade.

Ein von dem in dieser Arbeit entwickelten wesentlich verschiedenes Verfahren zur Auflösung des zweiten Randwertproblems der Differentialgleichung (1.) ist von Herrn *Picard* skizziert worden (Vgl. Annales de l'École Normale t. XIV, 1907, p. 335—340).

daselbst von Null verschieden*). Wir führen x und y als neue Variabeln ein und setzen

$$U(X, Y) = u(x, y). \tag{4.}$$

Die Funktion $u(x, y)$ ist diejenige im Innern des Einheitskreises reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\Delta(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \\ &a = A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad b = A\frac{\partial X}{\partial y} + B\frac{\partial Y}{\partial y}, \\ &c = C\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right], \quad f = F\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{5.}$$

deren Normalableitung an der Kreisperipherie eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Folge von Werten $g(s)$ annimmt. Es mögen r und θ die Koordinaten eines Polarsystems, dessen Ursprung im Kreismittelpunkt liegt, bezeichnen. Die partielle Ableitung $\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}$ ist, wie man sich leicht überzeugt, beschränkt und konvergiert in jedem Teile von S, der die Unstetigkeitspunkte von $g(s)$ nicht enthält, gleichmäßig gegen $-g(s)$. Die Koeffizienten a, b, c und f sind im Innern und auf dem Rande S von T stetig und haben daselbst stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Im Innern von T sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von a und b vorhanden und stetig. Die zu $\Delta(u) = 0$ adjungierte Differentialgleichung ist

$$M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + c^* u = 0, \quad c^* = c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}. \tag{6.}$$

Wie eine einfache Rechnung zeigt, ist

$$c^*(x, y) = c^* = \left[C - \frac{\partial A}{\partial X} - \frac{\partial B}{\partial Y}\right]\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right].$$

Die Funktion c^* ist ganz wie die Funktion c in T und auf S mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig.

Es sei $w(x, y)$ eine in T reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{\pi}\int_S g(t)\,dt = \alpha, \tag{7.}$$

---

*) Vgl. *L. Lichtenstein*, Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus, Math. Annalen 67 (1909), S. 559—575, insb. S. 561—563. — *A. Korn*, Sur les équations de l'élasticité, Annales de l'École Normale, 1907, S. 9—75, insb. S. 25.

deren Normalableitung auf S den Wert $g(s)$ annimmt*). Nach bekannten Sätzen ist eine Lösung dieser Art stets vorhanden und bis auf eine additive Konstante bestimmt. Ist die Funktion $g(s)$ auf S stetig und genügt sie etwa der *Hölder*schen Bedingung, so sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ in T und auf S stetig**). In dem von uns vorausgesetzten allgemeineren Falle einer abteilungsweise stetigen Funktion $g(s)$ werden $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ an der Kreisperipherie logarithmisch unendlich. Ist ϱ die Entfernung des Punktes (x, y) von S, so ist

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| < A_{22}\left|\log\frac{1}{\varrho}\right| + A_{23}. \tag{8.}$$

Wir setzen

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y). \tag{9.}$$

Die Funktion $u_0(x, y)$ ist eine beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 = f(x, y) - a(x, y)\frac{\partial w}{\partial x} - b(x, y)\frac{\partial w}{\partial y} - c(x, y)w - \alpha = \bar{f}(x, y). \tag{10.}$$

Die Funktion $\bar{f}(x, y)$ ist in jedem ganz im Innern von T enthaltenen Gebiete stetig und hat daselbst stetige Ableitungen erster Ordnung. *Bei der Annäherung an den Rand wird $\bar{f}(x, y)$ logarithmisch unendlich.* Es ist

$$|\bar{f}(x, y)| < A_{24}\left|\log\frac{1}{\varrho}\right| + A_{25}. \tag{11.}$$

Wir setzen die Funktion $u_0(x, y)$, die bis jetzt nur in T und auf S erklärt war, dadurch jenseits des Einheitskreises fort, daß wir ihr in den in bezug auf S konjugierten Punkten jedesmal die gleichen Werte beilegen. Ist (x_1, y_1) ein Punkt in T und

$$x = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2},$$

so wird mithin

---

*) Der präzise Sinn dieser Randbedingung ist nach den Ausführungen über $\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}$ klar.

**) Vgl. *L. Lichtenstein*, Über die zweite und dritte Randwertaufgabe in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(x, y)$, Sitzungsb. der Berliner Math. Ges. 1909, S. 19—28.

(12.) $$u_0(x, y) = u_0(x_1, y_1)$$

gesetzt. Die Funktion $u_0(x, y)$ genügt außerhalb des Einheitskreises der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}(13.)\quad &\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x}[a(x_1, y_1)(y_1^2 - x_1^2) - 2b(x_1, y_1)x_1 y_1] \\ &+ \frac{\partial u_0}{\partial y}[-2a(x_1, y_1)x_1 y_1 + b(x_1, y_1)(x_1^2 - y_1^2)] \\ &+ c(x_1, y_1)(x_1^2 + y_1^2)^2 u_0 = \bar{f}(x_1, y_1)(x_1^2 + y_1^2)^2.\end{aligned}$$

Setzen wir in T

(14.) $a_0(x,y) = a(x,y)$, $b_0(x,y) = b(x,y)$, $c_0(x,y) = c(x,y)$, $f_0(x,y) = \bar{f}(x,y)$,

außerhalb von T, kürzer in $\bar{T}$,

$$\begin{aligned}(15.)\quad a_0(x, y) &= a(x_1, y_1)(y_1^2 - x_1^2) - 2x_1 y_1 b(x_1, y_1), \\ b_0(x, y) &= -2x_1 y_1 a(x_1, y_1) + b(x_1, y_1)(x_1^2 - y_1^2), \\ c_0(x, y) &= c(x_1, y_1)(x_1^2 + y_1^2)^2, \quad f_0(x, y) = \bar{f}(x_1, y_1)(x_1^2 + y_1^2)^2,\end{aligned}$$

so genügt $u_0(x, y)$ überall, außer im allgemeinen auf S, der Differentialgleichung

(16.) $$\Delta_0(u_0) \equiv \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + a_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + b_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + c_0 u_0 = f_0.$$

Die Funktionen a_0 und b_0 sind auf S sprungweise unstetig und haben sowohl im Inneren als auch im Äußeren des Einheitskreises, die Begrenzung jedesmal eingeschlossen, stetige Ableitungen erster Ordnung. Im Innern von T und $\bar{T}$ sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von a und b vorhanden und stetig. Die Funktion c_0 ist überall stetig und hat in jedem der beiden Gebiete T und $\bar{T}$ mit Einschluß der Begrenzung stetige Ableitungen erster Ordnung. Die Funktion f_0 hat in T und $\bar{T}$ stetige Ableitungen erster Ordnung, wird aber bei der Annäherung an S logarithmisch unendlich. Ist (x, y) irgend ein Punkt in T oder in $\bar{T}$ und ϱ seine Entfernung von S, so ist

(17.) $$|f_0(x, y)| < A_{26} \left|\log \frac{1}{\varrho}\right| + A_{27}.$$

Die zu (16.) adjungierte Differentialgleichung ist, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$M_0(u_0) \equiv \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - a_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - b_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + c_0^* u = 0,$$

(18.) $$c_0^*(x, y) = \begin{cases} c^*(x, y) = c(x, y) - \dfrac{\partial a(x, y)}{\partial x} - \dfrac{\partial b(x, y)}{\partial y} & \text{in } T, \\ c^*(x, y)(x_1^2 + y_1^2)^2 & \text{in } \bar{T}. \end{cases}$$

Die Funktion $c_0^*(x, y)$ ist wie die Funktion $c(x, y)$ überall stetig und hat in jedem der beiden Gebiete T und $\bar{T}$ mit Einschluß der Begrenzung stetige Ableitungen erster Ordnung. Die Koeffizienten der Differentialgleichungen $\Delta_0(u_0) = 0$ und $M_0(u_0) = 0$ erfüllen alle Voraussetzungen, die wir den Koeffizienten der Differentialgleichung (1.) in I § 1 auferlegt haben. In einem „hinreichend kleinen", sonst in der Ebene (x, y) beliebig gelegenen Gebiete sind also die *Green*schen Funktionen von $\Delta_0(u_0) = 0$ und $M_0(u_0) = 0$ gewiß vorhanden.*)

Es seien $S_1, \ldots S_p$ gewisse mit S konzentrische Kreise, S' der zu S_1 in bezug auf S konjugierte Kreis. Wir wählen die Zahl p und die Radien

$$R_p < R_{p-1} < \cdots < R_1 < R = 1 < R'$$

der Kreise so, daß in den entsprechend von S', S_1; S, S_2; S_1, S_3; …; S_{p-2}, S_p; S_{p-1} ferner S, S_1; S_1, S_2; S_2, S_3; …; S_{p-1}, S_p begrenzten endlichen Gebieten die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichungen $\Delta_0(u_0) = 0$ und $M_0(u_0) = 0$ für alle abteilungsweise stetigen Randwerte eindeutig lösbar ist. Der Einfachheit halber nehmen wir $p = 2$ an und bezeichnen die zu den von S', S_1; S, S_2; S_1 begrenzten Gebieten T_1, T_2, T_3 gehörigen *Green*schen Funktionen der Differentialgleichung (18.) entsprechend mit $\mathfrak{H}_1(x, y; \xi, \eta), \mathfrak{H}_2(x, y; \xi, \eta), \mathfrak{H}_3(x, y; \xi, \eta)$.

Es mögen wie vorhin r und θ die Koordinaten eines Polarsystems, dessen Ursprung im Kreismittelpunkt liegt, bezeichnen. Die Funktion $u_0(x, y) = v_0(r, \theta)$ ist überall stetig. Es sei T^* irgend ein die Unstetigkeitspunkte von $g(s)$ nicht enthaltendes endliches Gebiet. Die partielle Ableitung $\dfrac{\partial u_0(x, y)}{\partial r}$ ist beschränkt, in T^* stetig und insbesondere für $r = R$ gleich Null. Die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial u_0}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial u_0}{\partial y}$ erfüllen nach Voraussetzung eine der Beziehung (8.) analoge Ungleichheit. Aus den Entwicklungen der §§ 1 und 2 des ersten Kapitels folgt, wie sich leicht zeigen läßt, *daß* $\dfrac{\partial u_0}{\partial x}$ *und* $\dfrac{\partial u_0}{\partial y}$ *überall stetig sind.*

Es seien $u(\theta), u_1(\theta), u_2(\theta)$ die Werte von $u_0(x, y)$ auf S, S_1 und S_2. Auf S' ist $u_0(x, y)$ gleichfalls gleich $u_1(\theta)$. Die Funktionen $u_1(\theta)$ und $u_2(\theta)$ sind stetig und haben stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung; die Funktion $u(\theta)$ ist gewiß stetig.

---

*) Vgl. Kapitel I §§ 3 und 5.

Wir wenden jetzt die Formel (54.) des ersten Kapitels auf das Gebiet T_1 an und erhalten

$$u_0(x,y) = \frac{R'}{2\pi}\int_{S'} \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_1(x,y;\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta + \frac{R_1}{2\pi}\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_1(x,y;\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta$$
$$(19.)\qquad - \frac{1}{2\pi}\iint_{T_1}\mathfrak{H}_1(x,y;\xi,\eta)\,f_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \frac{R}{2\pi}\int_{S}\mathfrak{H}_1(x,y;\theta)\,u(\theta)\,(\delta a_0\,d\eta - \delta b_0\,d\xi).$$

Zur Abkürzung ist hierin, wenn $(\xi_\theta, \eta_\theta)$ denjenigen Punkt auf S, S_1 oder S' bezeichnet, dessen Amplitude gleich θ ist, $\mathfrak{H}(x,y;\theta) = \mathfrak{H}(x,y;\xi_\theta,\eta_\theta)$ gesetzt worden. Das Symbol $\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichnet die Ableitung in der Richtung der Innennormale. Es ist schließlich, wenn vorübergehend $a_0(x,y) = a_0^*(r,\theta)$, $b_0(x,y) = b_0^*(r,\theta)$ gesetzt wird,

$$\delta a_0 = a_0^*(R+0,\theta) - a_0^*(R-0,\theta),\quad \delta b_0 = b_0^*(R+0,\theta) - b_0^*(R-0,\theta).$$

Läßt man jetzt den Punkt (x,y) in denjenigen Punkt $(\bar\xi,\bar\eta)$ der Kurve S, dessen Polarkoordinaten R und τ sind, übergehen und setzt man zur Vereinfachung

$$\mathfrak{H}_1(\bar\xi,\bar\eta;\theta) = \mathfrak{H}_1(\tau,\theta),\quad \mathfrak{H}_1(\bar\xi,\bar\eta;\xi,\eta) = \mathfrak{H}_1(\tau;\xi,\eta),$$

so erhält man aus (19.) die Formel

$$u(\tau) = \frac{R'}{2\pi}\int_{S'} \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_1(\tau,\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta + \frac{R_1}{2\pi}\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_1(\tau,\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta$$
$$(20.)\qquad - \frac{1}{2\pi}\iint_{T_2}\mathfrak{H}_1(\tau;\xi,\eta)\,f_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \frac{R}{2\pi}\int_{S}\mathfrak{H}_1(\tau,\theta)\,u(\theta)\,(\delta a_0\,d\eta - \delta b_0\,d\xi).$$

Wir wenden jetzt weiter die Formel (30.) des ersten Teiles auf die beiden Gebiete T_2 und T_3 an und erhalten für alle (x,y) in T_2

$$u_0(x,y) = \frac{R}{2\pi}\int_{S} \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_2(x,y;\theta)\,u(\theta)\,d\theta + \frac{R_2}{2\pi}\int_{S_2} \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_2(x,y;\theta)\,u_2(\theta)\,d\theta$$
$$(21.)\qquad - \frac{1}{2\pi}\iint_{T_2}\mathfrak{H}_2(x,y;\xi,\eta)\,f_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

für alle (x,y) in T_3

$$(22.)\quad u_0(x,y) = \frac{R_1}{2\pi}\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_3(x,y;\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\iint_{T_3}\mathfrak{H}_3(\tau;\xi,\eta)\,f_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Aus (21.) und (22.) folgen die beiden Gleichungen

$$u_1(\tau)=\frac{R}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_2(\tau,\theta)\,u(\theta)\,d\theta+\frac{R_2}{2\pi}\int_{S_2}\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_2(\tau,\theta)\,u_2(\theta)\,d\theta$$

(23.)
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{T_2}\mathfrak{H}_2(\tau;\xi,\eta)\,f_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$u_2(\tau)=\frac{R_1}{2\pi}\int_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_3(\tau,\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\iint_{T_3}\mathfrak{H}_3(\tau;\xi,\eta)\,f_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Die Formeln (20.) und (23.) bilden ein System simultaner linearer Integralgleichungen. Wir wollen jetzt zeigen, daß man umgekehrt die Gleichungen (19.) bis (23.) dazu benutzen kann, um die Lösung des Randwertproblems, die wir bis jetzt als bekannt vorausgesetzt haben, zu bestimmen.

Die Integralgleichungen (20.) und (23.) mögen zunächst eindeutig lösbar sein und es seien $u(\theta), u_1(\theta), u_2(\theta)$ ihre Lösungen.

Nach dem in I § 1 und § 2 auseinandergesetzten Verfahren bestimmen wir eine Lösung $u^{(1)}(x,y)$ der Differentialgleichung (16.), die in T_1 stetig ist, sich, außer etwa auf S, regulär verhält und auf S_1 und S' die Werte $u_1(\theta)$ annimmt. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}$ sind auf S stetig*). Es sei ferner $u^{(2)}(x,y)$ diejenige in T_2 reguläre Lösung von (10.), die auf S und S_2 entsprechend die Werte $u(\theta)$ und $u_2(\theta)$ erhält. Endlich sei $u^{(3)}(x,y)$ die in T_3 reguläre Lösung von (10.), die auf S_1 gleich $u_1(\theta)$ wird.

Für alle (x,y) in T_1 erhalten wir wie vorhin für $u_0(x,y)$ die Formel

$$u^{(1)}(x,y)=\frac{R'}{2\pi}\int_{S'}\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_1(x,y;\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta+\frac{R_1}{2\pi}\int_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}_1(x,y;\theta)\,u_1(\theta)\,d\theta$$

(24.)
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{T_1}\mathfrak{H}_1(x,y;\xi,\eta)\,f_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\frac{R}{2\pi}\int_S\mathfrak{H}_1(x,y;\theta)\,u(\theta)\,(\delta a_0\,d\eta-\delta b_0\,d\xi).$$

Offenbar nimmt der Gleichung (20.) zufolge $u^{(1)}(x,y)$ auf S die Werte $u(\tau)$ an. In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß $u^{(2)}(x,y)$ auf S gleich $u_1(\tau)$, $u^{(3)}(x,y)$ auf S_2 gleich $u_2(\tau)$ wird. In jedem der von $S, S_1; S_1, S_2; S_2$ begrenzten endlichen Gebiete ist das erste Randwertproblem nach Voraussetzung eindeutig lösbar. Die Lösungen $u^{(1)}(x,y)$ und $u^{(2)}(x,y)$ nehmen auf S_1 und S dieselben Werte an. Sie sind daher in dem ganzen von

---

*) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $u^{(1)}(x,y)$ sind auf S im allgemeinen weder stetig noch selbst abteilungsweise stetig. Die Lösung $u^{(1)}(x,y)$ ist daher auf S im allgemeinen nicht regulär.

S_1 und S begrenzten Gebiete einander gleich. Ebenso sind $u^{(2)}(x, y)$ und $u^{(3)}(x, y)$ in dem von S_1 und S_2 begrenzten Gebiete identisch. Führt man nunmehr eine Funktion $u_0^*(x, y)$ ein, die in T_1, T_2, T_3 entsprechend gleich $u^{(1)}(x, y), u^{(2)}(x, y), u^{(3)}(x, y)$ ist, so stellt $u_0^*(x, y)$ eine in dem von S' begrenzten endlichen Gebiete, außer etwa auf S, reguläre*) Lösung der Differentialgleichung (16.) dar. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_0^*(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u_0^*(x, y)}{\partial y}$ sind noch auf S stetig. In T_1, T_2, T_3 wird offenbar $u_0^*(x, y)$ entsprechend durch die Gleichung (24.) und die Formeln (21.) und (22.), in denen linker Hand $u^{(2)}(x, y)$ und $u^{(3)}(x, y)$ zu setzen ist, dargestellt.

Es sei (x_1, y_1) ein Punkt in T_1 und

$$(x, y) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$$

der zu ihm konjugierte Punkt. Wir beweisen, daß

$$u^{(1)}(x, y) = u^{(1)}(x_1, y_1). \tag{25.}$$

Führt man durch die Gleichungen

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

neue Variabeln ein, so gehen die Kurven S_1, S, S' entsprechend in S', S, S_1 über, die Differentialgleichung (16.) bleibt invariant. Setzt man

$$u^{(1)}(x, y) = u^{(4)}(x_1, y_1), \tag{26.}$$

so stellt $u^{(4)}(x_1, y_1)$ eine in T_1, außer höchstens auf S, reguläre Lösung der Differentialgleichung (16.) dar, die auf S_1 und S' die Werte $u_1(\theta)$ annimmt. Die Funktion

$$u^{(5)}(x, y) = u^{(1)}(x, y) - u^{(4)}(x, y) \tag{27.}$$

ist eine in T_1, außer vielleicht auf S, reguläre, auf S_1 und S' verschwindende Lösung der Differentialgleichung $\Delta_0(u) = 0$. Es ist nun leicht zu zeigen, daß $u^{(5)}(x, y)$ sich auch noch auf S regulär verhält. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u^{(5)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(5)}}{\partial y^2} = -a_0 \frac{\partial u^{(5)}}{\partial x} - b_0 \frac{\partial u^{(5)}}{\partial y} - c_0 u^{(5)} \tag{28.}$$

ergibt sich, da $\frac{\partial u^{(5)}}{\partial x}, \frac{\partial u^{(5)}}{\partial y}$ auf S stetig sind, in der üblichen Weise zuerst, daß diese partiellen Ableitungen der *Hölder*schen Bedingung genügen, dann dem Hilfssatze in der Einleitung zufolge, daß $\frac{\partial^2 u^{(5)}}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u^{(5)}}{\partial y^2}$ sich auf S

*) Vgl. die Fußnote auf S. 87.

sprungweise ändern. Da in T_1 die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung (16.) nach Voraussetzung eindeutig lösbar ist, so ist

$$u^{(5)}(x, y) \equiv 0, \quad u^{(1)}(x, y) \equiv u^{(4)}(x, y). \tag{29.}$$

Aus (29.) und (26.) folgt somit in der Tat

$$u^{(1)}(x, y) = u^{(1)}(x_1, y_1). \tag{30.}$$

Da nun $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}$ und $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}$ auf S stetig sind, so ist demnach auf S

$$\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial n} = \frac{\partial u_0^*(x,y)}{\partial n} = 0. \tag{31.}$$

Offenbar ist die soeben gefundene Funktion $u_0^*(x, y)$ die einzige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (10.), *deren Normalableitung auf S verschwindet.* Denn ist $u_0(x, y)$ eine andere Lösung von gleichen Eigenschaften, so bestehen, wie wir vorhin gezeigt haben, die Beziehungen (19.) bis (23.). Aus diesen und aus den analogen Gleichungen für $u_0^*(x, y)$ folgt in T identisch

$$u_0(x, y) = u_0^*(x, y). \tag{32.}$$

Die Funktion

$$U(X, Y) = u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y)$$

ist die einzige Lösung des eingangs gestellten Problems.

Wir haben bis jetzt angenommen, daß die simultanen nicht homogenen Integralgleichungen (20.) und (23.) eindeutig lösbar sind. Es mögen jetzt die zugehörigen homogenen Integralgleichungen von Null verschiedene Lösungen haben. Man überzeugt sich in derselben Weise wie vorhin, daß alsdann die Differentialgleichung $\bar{L}(U) = 0$ eine endliche Anzahl linear unabhängiger, in T regulärer Lösungen hat, deren Normalableitung auf S verschwindet.

Wir sind bei unseren Betrachtungen von einem einfach zusammenhängenden Gebiete ausgegangen. Liegt ein mehrfach zusammenhängender Bereich vor, so wird dieser auf ein von Vollkreisen begrenztes Gebiet abgebildet. Die Lösung wird über alle Kreislinien durch Spiegelung fortgesetzt und es wird im übrigen wie vorhin verfahren. Man hat wieder eine Anzahl verschiedener Gebiete zu betrachten und auf jedes die Formel (55.) des ersten Kapitels oder die Formel (30.) des ersten Teiles dieser Arbeit anzuwenden. Hat das vorgelegte Gebiet p Begrenzungslinien, so hat man hierbei neben einer Anzahl Kreisringgebiete ein von p Kreisen begrenztes Gebiet zu betrachten. Dieses ist so zu wählen, daß die erste

Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ daselbst eindeutig lösbar wird. Dies kann man ohne Zweifel immer erreichen. Aus unseren Eindeutigkeitssätzen läßt sich diese Eigenschaft allerdings nicht ableiten. Wir gehen auf diesen Gegenstand nicht näher ein.

Durch die Betrachtungen dieses Paragraphen ist nebenbei die folgende Randwertaufgabe mit erledigt.

Es ist diejenige beschränkte, in einem Kreisringgebiete) reguläre Lösung* $u(x, y) = u(r, \theta)$ *der Differentialgleichung* $\Delta(u) = f$ *zu bestimmen, die auf der einen Randkurve vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Randwerte annimmt, während auf der anderen Randkurve der Wert ihrer Normalableitung* $g(s)$ *vorgegeben ist.* Auch dieser Wert stellt eine abteilungsweise stetige Funktion der Bogenlänge dar.

Es sei etwa der von S und S_2 begrenzte Kreisring das fragliche Gebiet, und es sei auf S

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} = -g(s), \tag{33.}$$

auf S_2 aber

$$u(r, \theta) = \varphi(s). \tag{34.}$$

Es möge $w(x, y)$ dieselbe Bedeutung wie vorhin haben. Wir setzen wieder

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y) \tag{35.}$$

und bezeichnen den bekannten abteilungsweise stetigen Wert von $u_0(x, y)$ auf S_2 mit $\varphi_0(\theta)$. Offenbar ist $u_0(x, y) = u_0(r, \theta)$ diejenige in unserem Kreisringe reguläre Lösung der Differentialgleichung (10.), die den Bedingungen

$$\begin{aligned} &u_0(r, \theta) = \varphi_0(\theta) \quad \text{auf } S_2, \\ &\frac{\partial u_0(r, \theta)}{\partial r} = 0 \qquad \text{auf } S \end{aligned} \tag{36.}$$

genügt. Bezeichnet man den Wert von $u_0(x, y)$ auf S_1 und S wieder mit $u_1(s)$ und $u(s)$, so erhält man zur Bestimmung dieser Funktionen ein System von zwei simultanen linearen Integralgleichungen. Die eine ist die Gleichung (20.), die andere erhält man aus der ersten der Gleichungen (23.), wenn man rechter Hand $\varphi_0(\theta)$ für $u_2(\theta)$ setzt.

§ 2. Die zu dem zweiten Randwertproblem gehörige *Green*sche Funktion.

Ist das zweite Randwertproblem eindeutig lösbar, so existiert die zugehörige *Green*sche Funktion $\mathfrak{G}^{II}(x^*, y^*; x, y)$ der Differentialgleichung

*) Allgemeiner, in einem zweifach zusammenhängenden Gebiete, dessen beide Begrenzungskurven die der Kurve Σ vorhin erteilten Eigenschaften haben.

$A(u) = 0$, d. h. diejenige in T, außer in (x^*, y^*), reguläre Lösung, die in (x^*, y^*) sich wie

$$-\tfrac{1}{2}\log\{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2\}$$

verhält und auf S der Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{G}^{II}}{\partial n} = 0$$

genügt. Die Bestimmung der Funktion $\mathfrak{G}^{II}$ macht nach unseren bisherigen Ergebnissen keine Schwierigkeiten. Es möge etwa (x^*, y^*) in dem von S und S_1 begrenzten Ringgebiete T^* liegen, und es sei (x_1^*, y_1^*) der zu (x^*, y^*) in bezug auf S konjugierte Punkt. Zur Bestimmung der Werte von $\mathfrak{G}^{II}$ auf S, S_1 und S_2 erhält man ein den Gleichungen (20.) und (23.) ganz analoges System linearer Integralgleichungen. In (20.) tritt rechter Hand der Ausdruck

$$\mathfrak{G}_1(x^*, y^*; x, y) + \mathfrak{G}_1(x_1^*, y_1^*; x, y),$$

in der ersten der Gleichungen (23.) das Glied

$$\mathfrak{G}_2(x^*, y^*; x, y)$$

hinzu. Hierin bezeichnen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ die zu T_1 und T_2 gehörigen am Rande verschwindenden *Green*schen Funktionen der Differentialgleichungen $A_0(u_0) = 0$ und $A(u) = 0$.

Das Verhalten der Funktion $\mathfrak{G}^{II}$ bei der Annäherung der Punkte (x^*, y^*) und (x, y) an S läßt sich nunmehr leicht überschauen. Es sei T_* irgend ein Teil des Gebietes T^*, der keinen dem Kreise S_1 angehörenden Punkt enthält. Für alle (x^*, y^*) und (x, y) im Innern oder auf dem Rande von T_* ist

$$(37.)\quad \mathfrak{G}^{II}(x^*, y^*; x, y) = \mathfrak{G}_1(x^*, y^*; x, y) + \mathfrak{G}_1(x_1^*, y_1^*; x, y) + \gamma'(x^*, y^*; x, y).$$

Hierin bezeichnet $\gamma'(x^*, y^*; x, y)$ eine für *alle* (x^*, y^*) und (x, y) in T_* (Begrenzung eingeschlossen) stetige Funktion.

Rücken (x^*, y^*) und (x, y) etwa in die Punkte $(\xi^*, \eta^*) = \sigma^*$ und $(\xi, \eta) = \sigma$ auf S hinein, so finden wir aus (37.) die weitere Beziehung

$$(38.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{G}^{II}(\sigma^*, \sigma) &= 2\mathfrak{G}_1(\sigma^*, \sigma) + \gamma'(\sigma^*, \sigma) \\ &= -\log\{(\xi^*-\xi)^2+(\eta^*-\eta)^2\} + \gamma''(\sigma^*, \sigma). \end{aligned}$$

γ' und γ'' sind stetige Funktionen von σ^* und σ auf S.

Es sei

$$(39.)\quad \mathfrak{G}^{II}(x^*, y^*; x, y) = G^{II}(X^*, Y^*; X, Y).$$

Offenbar ist G^{II} die zu dem zweiten Randwertproblem und dem Gebiete Θ gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $L(U) = 0$.

Wie man sich leicht überzeugt, gilt für G^{II} eine zu (38.) analoge Relation.

Liegt endlich ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer endlichen Anzahl geschlossener Kurven von der Art der Kurve Σ begrenzt ist, vor, so kann man dieses wie am Schluß des vorhergehenden Paragraphen auf ein von Vollkreisen begrenztes Gebiet konform abbilden. Alsdann gelangt man ohne Schwierigkeit zu Relationen, die den Gleichungen (37.) und (38.) analog sind.

Wir nehmen jetzt an, daß die zu G^{II} analoge *Green*sche Funktion H^{II} der Differentialgleichung

$$(40.)\qquad \overline{M}(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial}{\partial X}\left(A\frac{\partial U}{\partial X}\right) - \frac{\partial}{\partial Y}\left(B\frac{\partial U}{\partial Y}\right) + CU = 0$$

existiert*). Setzt man in der *Green*schen Formel

$$(41.)\qquad \begin{aligned}\iint_{\Theta}[w'\overline{L}(w'') - w''\overline{M}(w')]\,dX\,dY &= -\int_{\Sigma}\left(w'\frac{\partial w''}{\partial N} - w''\frac{\partial w'}{\partial N}\right)d\sigma \\ &\quad + \int_{\Sigma} w'w''(A\,dY - B\,dX)\end{aligned}$$

für w' und w'' entsprechend $H^{II}(X^*, Y^*; X, Y)$ und $U(X, Y)$ ein, so erhält man in bekannter Weise

$$(42.)\qquad \begin{aligned}U(X^*, Y^*) &= -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Theta} H^{II}(X^*, Y^*; X, Y)\,F(X, Y)\,dX\,dY \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} H^{II}(X^*, Y^*; \sigma)\,\gamma(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} H^{II}(X^*, Y^*; \sigma)\,U(\sigma)\,(A\,dY - B\,dX).\end{aligned}$$

In dieser Formel ist zur Abkürzung $H^{II}(X^*, Y^*; \sigma)$ für $H^{II}(X^*, Y^*; X, Y)$ und $U(\sigma)$ für $U(X, Y)$, unter (X, Y) den zum Werte σ der Bogenlänge gehörigen Punkt auf Σ verstanden, gesetzt worden. Die Anwendung der *Green*schen Formel (41.) ist gestattet, da, wie aus den Entwicklungen in § 1 dieses Kapitels folgt, die Normalableitung $\frac{\partial U}{\partial N}$ beschränkt ist und, außer in etwaigen Unstetigkeitspunkten von $\gamma(\sigma)$, gegen ihren Grenzwert auf Σ gleichmäßig konvergiert.

Geht jetzt (X^*, Y^*) in einen Punkt $(X', Y') = \sigma'$ auf Σ über, so liefert die Gleichung (42.) die weitere Beziehung

---

*) Ob die Funktion G^{II} selbst dabei vorhanden ist oder nicht, ist für das Folgende gleichgültig.

$$U(\sigma') = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Theta} H^{II}(\sigma'; X, Y)\, F(X, Y)\, dX\, dY$$

(43.)
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} H^{II}(\sigma', \sigma)\, \gamma(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} H^{II}(\sigma', \sigma)\, U(\sigma)\,(A\,dY - B\,dX).$$

Diese Integralgleichung kann zur Bestimmung der Randwerte $U(\sigma)$ der Lösung $U(X, Y)$ dienen. Ihr Kern wird nach (38.) für $\sigma = \sigma'$ logarithmisch unendlich.

Kapitel III. Gemischte Randbedingungen.

§ 1. Reguläre Lösungen.

Im Anschluß an die im zweiten Kapitel erledigte zweite Randwertaufgabe wollen wir nunmehr ein Randwertproblem mit gemischten Randbedingungen betrachten.

Es mögen Θ und Σ dieselbe Bedeutung wie im Kapitel II § 1 haben. Es sei Σ_1 irgendein zusammenhängender oder aus mehreren Stücken bestehender Teil von Σ und $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. *Es wird eine beschränkte, in Θ reguläre Lösung $U(X, Y)$ der Differentialgleichung*

(1.)
$$\bar{L}(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A\frac{\partial U}{\partial X} + B\frac{\partial U}{\partial Y} + C\,U = F$$

*gesucht, die auf Σ_1 eine vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Wertfolge $\gamma(\sigma)$ annimmt und die so beschaffen ist, daß ihre Normalableitung auf Σ_2 eine andere vorgegebene, gleichfalls abteilungsweise stetige Wertfolge $\pi(\sigma)$ erhält**).

Bildet man wie bei der zweiten Randwertaufgabe das Gebiet Θ auf die Fläche des Einheitskreises T durch Vermittlung einer Funktion

$$x + iy = z = z(Z) = x(X, Y) + iy(X, Y)$$

konform ab und führt man x und y als neue Variabeln ein, so läßt sich das vorliegende Randwertproblem auf das folgende zurückführen.

Es sei mit S wieder der Rand des Gebietes T bezeichnet. Auf S ist eine endliche Anzahl zusammenhängender Stücke $S_1, S_2, \ldots S_m$, deren Gesamtheit kürzer mit $\underline{S}$ bezeichnet werden mag, gegeben. Der aus eben-

---

*) Wie im Kapitel II § 1 wollen wir das Problem dahin präzisieren, daß die Normalableitung $\frac{\partial U}{\partial N}$ in jedem Σ_1 nicht enthaltenden Teile von Θ beschränkt ist und, außer in den etwaigen Unstetigkeitspunkten von $\gamma(\sigma)$, gegen ihren Grenzwert gleichmäßig konvergiert. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial X}$, $\frac{\partial U}{\partial Y}$ werden in demselben Gebiete bei der Annäherung an den Rand höchstens logarithmisch unendlich.

falls m zusammenhängenden Stücken bestehende Rest von S möge $\bar{S}$ heißen. *Es wird nun diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung $u(x, y) = u(r, \theta)$ der Differentialgleichung $\Delta(u) = f$ gesucht, die auf $\underline{S}$ eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge $\varphi(s)$ annimmt, während auf $\bar{S}$ die Beziehung besteht*

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = -\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} = g(s). \tag{44.}$$

Hierin bezeichnet $\frac{\partial u(x, y)}{\partial n}$ die Ableitung der Lösung in der Richtung der Innennormale, $g(s)$ eine vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Funktion. Das Verhalten von $\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}$ in der Umgebung der Unstetigkeitspunkte von $g(s)$ wird durch die Festsetzung präzisiert, daß in jedem die Kreisbögen $\underline{S}$ (Endpunkte eingeschlossen) nicht enthaltenden Teile τ von T die partielle Ableitung $\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}$ beschränkt sein und, sofern τ keine Unstetigkeitsstellen von $g(s)$ enthält, für $r = R$ gleichmäßig gegen $-g(s)$ konvergieren soll. Über das Verhalten von $\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}$ in der Umgebung der gemeinsamen Endpunkte von $\underline{S}$ und $\bar{S}$ werden keine Voraussetzungen gemacht. Die Funktion $u(x, y)$ soll in jenen Punkten stetig sein.

Es sei $g_0(s)$ irgend eine auf S erklärte abteilungsweise stetige, der Beziehung

$$\int_0^{2\pi} g_0(s)\, ds = 0 \tag{45.}$$

genügende Funktion, die auf $\bar{S}$ mit $g(s)$ übereinstimmt, $w(x, y) = w(r, \theta)$ diejenige in T reguläre Potentialfunktion, deren Normalableitung auf S den Wert $g_0(s)$ annimmt und die der Beziehung

$$w(0, 0) = 1 \tag{46.}$$

genügt*).

Es sei $w(s)$ der Wert von $w(x, y)$ auf S. Wir setzen

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y). \tag{47.}$$

$u_0(x, y)$ ist diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung

---

*) In der Umgebung der Unstetigkeitsstellen von $g(s)$ ist $\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r}$ beschränkt.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+a\frac{\partial u_0}{\partial x}+b\frac{\partial u_0}{\partial y}+cu_0=f-a\frac{\partial w}{\partial x}-b\frac{\partial w}{\partial y}-cw=\bar{f},$$

die auf $\underline{S}$ den Wert

$$\varphi(s)-w(s)\equiv\varphi_1(s) \tag{48.}$$

annimmt und deren Normalableitung auf $\bar{S}$, außer vielleicht in den Unstetigkeitsstellen von $g_0(s)$, verschwindet. In der Umgebung dieser Stellen ist $\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial r}$ jedenfalls beschränkt. Die Funktion $\bar{f}$ verhält sich in T genau wie die im Kapitel II § 1 ebenso bezeichnete Funktion.

Wir setzen die Funktion $u_0(x,y)$ ganz wie in II § 1 dadurch in der ganzen Ebene fort, daß wir ihr in den in bezug auf S konjugierten Punkten jedesmal die gleichen Werte beilegen. Ist (x_1,y_1) ein Punkt in T und

$$x=\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},\quad y=\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2},$$

so wird mithin

$$u_0(x,y)=u_0(x_1,y_1) \tag{49.}$$

gesetzt. Die Funktion $u_0(x,y)$ ist beschränkt und, außer in den Unstetigkeitspunkten von $\varphi(s)$, in der ganzen Ebene stetig; sie hat in T und außerhalb T, kürzer in $\bar{T}$, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Im Unendlichen konvergiert $u_0(x,y)$ gegen $u_0(0,0)$. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung verhalten sich daselbst wie $(x^2+y^2)^{-1}$, die Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ wie $(x^2+y^2)^{-2}$. Im Innern eines jeden der Kreisbögen $\bar{S}$ ist $\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}$, außer vielleicht in den Unstetigkeitsstellen der Funktion $g(s)$, stetig und gleich Null, in der Umgebung der erwähnten Ausnahmepunkte jedenfalls beschränkt. In T und $\bar{T}$ genügt $u_0(x,y)$ schließlich der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta_0(u_0)\equiv\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+a_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+b_0\frac{\partial u_0}{\partial y}+c_0u_0=f_0. \tag{50.}$$

Die Koeffizienten a_0, b_0, c_0, f_0 sind hierbei die durch die Gleichungen (14.) und (15.) erklärten Funktionen. Auf den doppelt zu zählenden Kurven $\underline{S}$ nimmt $u_0(x,y)$ die vorgeschriebenen Werte $\varphi(s)$ an. Aus den Betrachtungen des ersten Kapitels kann man schließen, daß $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}$ auf jedem ganz im Innern von $\bar{S}$ enthaltenen Bogen von S sich stetig verhalten.

Es sei jetzt

$$\zeta = \xi + i\eta = \zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y) \tag{51.}$$

eine analytische Funktion, durch deren Vermittlung die mit m auf dem Einheitskreise verteilten Schlitzen versehene (x, y)-Ebene auf ein von m geschlossenen regulär analytischen Kurven Σ_* begrenztes endliches Gebiet Θ_* konform abgebildet wird. Bei dieser Abbildung gehen die Kreisbögen $\overline{S}$ in m regulär analytische von Rand zu Rand verlaufende Kurvenstücke, deren Gesamtheit mit Σ' bezeichnet werden mag, über. Wir führen ξ und η als neue Variabeln ein und setzen

$$u_0(x, y) = u_*(\xi, \eta). \tag{52.}$$

Die Funktion $u_*(\xi, \eta)$ ist eine beschränkte, im Innern von Θ_*, außer etwa auf Σ', reguläre Lösung einer Differentialgleichung von der Form

$$\Lambda^*(u_*) \equiv \frac{\partial^2 u_*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial \eta^2} + a_* \frac{\partial u_*}{\partial \xi} + b_* \frac{\partial u_*}{\partial \eta} + c_* u_* = f_*.^*) \tag{53.}$$

Die Koeffizienten a_*, b_*, c_* sind auf Σ' sprungweise unstetig und haben sowohl im Innern als auch auf dem Rande jedes der Teilgebiete, in die Θ_* durch Σ' zerlegt wird, stetige Ableitungen erster Ordnung. Die Funktion f_* ist im Innern eines jeden der soeben erwähnten Teilgebiete stetig und hat daselbst stetige Ableitungen erster Ordnung. Bei der Annäherung an Σ_* oder Σ' wird f_* logarithmisch unendlich. Ist ϱ_* der kleinste Wert der Entfernung des Punktes (ξ, η) von den Bögen Σ_* und Σ', so ist

$$|f_*(\xi, \eta)| < A_{28} |\log \varrho_*| + A_{29}.$$

Die Funktion $u_*(\xi, \eta)$ nimmt auf Σ_* eine vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Folge von Werten $\varphi_*(\sigma_*)$ an. Ist $f(x, y) \equiv 0$, $\varphi(s) \equiv 0$, so ist insbesondere $u_*(\xi, \eta)$ diejenige in Θ_* reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Lambda^*(u_*) = 0$, die auf Σ_* verschwindet.

Unser Randwertproblem ist auf das im Kapitel I erledigte Problem zurückgeführt.

Betrachten wir jetzt umgekehrt die in Θ_*, außer etwa auf Σ', regulären Lösungen der Differentialgleichung (53.) und nehmen wir zunächst

---

*) Vgl. die Fußnote *) auf S. 87.

**) Mit σ_* bezeichnen wir die Bogenlänge der Kurve Σ_*. Da f_* auf Σ' logarithmisch unendlich wird, so werden die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von u_* auf Σ' unendlich groß; $u_*(\xi, \eta)$ ist daselbst nicht mehr regulär.

an, die erste Randwertaufgabe der Theorie dieser Differentialgleichung sei eindeutig lösbar.

Von dem eingangs gestellten Randwertproblem mit gemischten Randbedingungen ausgehend, bestimmen wir wie vorhin die Funktionen $f_*(\xi, \eta)$ und $\varphi_*(\sigma_*)$. Es sei nunmehr $u_*(\xi, \eta)$ diejenige beschränkte, in Θ_*, außer etwa auf Σ', reguläre Lösung der Differentialgleichung (53.), die auf Σ_* die Werte $\varphi_*(\sigma_*)$ annimmt*). Wir setzen

$$u_*(\xi, \eta) = u_0(x, y) \tag{54.}$$

und beweisen, daß $u_0(x, y)$ *in den beiden zueinander in bezug auf* S *konjugierten Punkten* (x, y) *und* (x_1, y_1) *jedesmal die gleichen Werte annimmt*:

$$u_0(x, y) = u_0(x_1, y_1). \tag{55.}$$

Es sei entgegen unserer Behauptung $u_0(x, y)$ nicht durchweg gleich $u_0(x_1, y_1)$. Es sei dann $\bar{u}_0(x, y)$ die durch die Gleichung

$$\bar{u}_0(x, y) = u_0\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\Big) \tag{56.}$$

erklärte Funktion. Sie ist von $u_0(x, y)$ verschieden, erfüllt augenscheinlich die Differentialgleichung (50.) und nimmt auf den doppelt zu zählenden Kurven $\underline{S}$ dieselben Werte wie $u_0(x, y)$ an. Die Funktion $\bar{u}_*(\xi, \eta) = \bar{u}_0(x, y)$, die von $u_*(\xi, \eta)$ verschieden ist, würde dann die Differentialgleichung (53.) erfüllen und auf Σ_* mit $u_*(\xi, \eta)$ übereinstimmen. Dies ist aber nicht möglich. Es ist daher $u_0(x, y) = u_0(x_1, y_1)$. Hieraus folgt, daß die Normalableitung von $u_0(x, y)$ in allen im Innern der Kurvenstücke $\bar{S}$ gelegenen Punkten von S verschwindet. *Die Funktion*

$$U(X, Y) = u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y) \tag{57.}$$

ist die gesuchte Lösung der ursprünglich vorgelegten Randwertaufgabe. Die Lösung ist offenbar eindeutig.

Es möge jetzt zweitens das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $\mathcal{A}^*(u_*) = f_*$ im Gebiete Θ_* nicht allgemein lösbar sein, und es sei

$$u_{*1}(\xi, \eta),\ u_{*2}(\xi, \eta), \dots\ u_{*k}(\xi, \eta) \tag{58.}$$

ein System der linear unabhängigen, in Θ_* regulären, auf Σ_* verschwindenden Lösungen der Differentialgleichung $\mathcal{A}^*(u_*) = 0$.

Die Funktionen

---

*) Den Untersuchungen des ersten Kapitels gemäß wird dabei vorausgesetzt, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung der betrachteten Lösung sich im Innern des Gebietes Θ_* stetig verhalten.

$$\text{(59.)} \qquad \bar{u}_{*i}(\xi, \eta) = u_{*i}(\xi, \eta) + u_{*i}(\xi_1, \eta_1), \qquad (i=1, \dots k)$$

unter (ξ_1, η_1) den zu (ξ, η) konjugierten Punkt*) verstanden, sind augenscheinlich gleichfalls in Θ_* reguläre, auf Σ_* verschwindende Lösungen von $A^*(u_*) = 0$. Aus

$$\bar{u}_{*i}(\xi, \eta) = \bar{u}_{*i}(\xi_1, \eta_1)$$

folgt, wie sich leicht zeigen läßt, auf Σ'

$$\frac{\partial}{\partial n} \bar{u}_{*i}(\xi, \eta) = 0.$$

Sofern $\bar{u}_{*i}(\xi, \eta)$ nicht identisch verschwindet, ist demnach

$$\text{(60.)} \qquad \bar{u}_i(x, y) = \bar{u}_{*i}(\xi, \eta)$$

eine in T reguläre, auf $\underline{S}$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung $A(u) = 0$, deren Normalableitung auf $\bar{S}$ den Wert Null hat.

Jetzt sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem es in T reguläre, auf S verschwindende Lösungen der Differentialgleichung $A(u) = 0$ gibt oder nicht. Im letzteren Falle sind alle $\bar{u}_{*i}(\xi, \eta)$ linear unabhängig, sie verschwinden also gewiß nicht identisch. *Es gibt k linear unabhängige, in T reguläre, auf $\underline{S}$ verschwindende Lösungen von $A(u) = 0$, deren Normalableitung auf S gleich Null ist.*

Es sei etwa im Gegensatz zu dieser Behauptung

$$\text{(61.)} \qquad \alpha_1 \bar{u}_{*1} + \cdots + \alpha_k \bar{u}_{*k} \equiv 0$$

eine in Θ_* identisch erfüllte lineare Beziehung. Auf Σ' ist

$$\alpha_1 \bar{u}_{*1} + \cdots + \alpha_k \bar{u}_{*k} = 2(\alpha_1 u_{*1} + \cdots + \alpha_k u_{*k}).$$

Setzt man

$$\text{(62.)} \qquad U_*(\xi, \eta) = \alpha_1 u_{*1} + \cdots + \alpha_k u_{*k},$$

so ist $U_*(\xi, \eta)$ eine in Θ_* nicht identisch verschwindende reguläre Lösung der Differentialgleichung $A^*(u_*) = 0$, die auf Σ_* und Σ' gleich Null wird. $\underline{U}(x, y) \equiv U_*(\xi, \eta)$ wäre eine von Null verschiedene, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung von $A(u) = 0$, was ausgeschlossen ist.

Es seien zweitens

$$\text{(63.)} \qquad \omega_1(x, y), \dots \omega_p(x, y)$$

p linear unabhängige, in T reguläre, auf S verschwindende Lösungen der Differentialgleichung $A(u) = 0$. Wir setzen

---

*) Wir sagen zur Vereinfachung, die Punkte (ξ, η) und (ξ_1, η_1) seien konjugiert, wenn die ihnen in der Ebene (x, y) entsprechenden Punkte konjugiert sind.

$$\omega_i(x, y) = \omega_{*i}(\xi, \eta), \qquad (i=1, \dots p)$$
$$\omega_{*i}(\xi_1, \eta_1) = -\omega_{*i}(\xi, \eta). \tag{64.}$$

Durch (64.) sind, wie man sich leicht überzeugt, p linear unabhängige, in Θ_* reguläre, auf Σ_* und Σ' verschwindende Lösungen der Differentialgleichung $A^*(u_*) = 0$ erklärt. Es sei

$$\omega_{*1}(\xi, \eta),\ \omega_{*2}(\xi, \eta), \dots \omega_{*p}(\xi, \eta),\ \nu_{*1}(\xi, \eta), \dots \nu_{*l}(\xi, \eta) \qquad (l \geq 0,\ p+l=k) \tag{65.}$$

ein System linear unabhängiger, in Θ_* regulärer, auf Σ_* verschwindender Lösungen der Differentialgleichung $A^*(u_*) = 0$.

Wir setzen wieder

$$\bar{\nu}_{*i}(\xi, \eta) = \nu_{*1}(\xi, \eta) + \nu_{*1}(\xi_1, \eta_1). \qquad (i=1, \dots l) \tag{66.}$$

Die Lösungen $\bar{\nu}_{*i}(\xi, \eta)$ verhalten sich wie vorhin die Funktionen $\bar{u}_{*i}(\xi, \eta)$. Sie sind linear unabhängig. Es sei im Gegensatz hierzu etwa

$$\alpha_1 \bar{\nu}_{*1} + \dots + \alpha_l \bar{\nu}_{*l} \equiv 0.$$

Für alle (ξ, η) auf Σ' finden wir hieraus

$$\alpha_1 \nu_{*1} + \dots + \alpha_l \nu_{*l} = 0. \tag{67.}$$

Da diese Beziehung offenbar auch noch auf Σ_* gilt, so muß für alle (ξ, η) in Θ_*

$$\alpha_1 \nu_{*1} + \dots + \alpha_l \nu_{*l} = \beta_1 \omega_{*1} + \dots + \beta_p \omega_{*p}$$

sein, was ausgeschlossen ist.

Hat die Differentialgleichung $A^*(u_*) = 0$ insgesamt k linear unabhängige, reguläre, auf Σ_* verschwindende Lösungen, so gibt es im vorliegenden Falle $l = k - p$ in T reguläre, linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $A(u) = 0$, die auf $\underline{S}$ verschwinden und deren Normalableitung auf $\bar{S}$ gleich Null wird. Insbesondere kann auch $l = 0$ ausfallen.

Damit die nicht homogene Randwertaufgabe lösbar ist, müssen $f_*(\xi, \eta)$ und $\varphi_*(\sigma_*)$ gewissen k Integralrelationen genügen. Wir beweisen, daß p dieser Relationen identisch erfüllt sind.

Der Einfachheit halber wird vorausgesetzt, daß $\gamma(\sigma) = 0$ und $\pi(\sigma) = 0$ ist, während $F(X, Y)$ nicht identisch verschwindet. Den Entwicklungen des § 2 des ersten Kapitels zufolge, muß

$$\iint_{\Theta_*} f_*(\xi, \eta)\, \pi_*^{(i)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (i=1, 2, \dots p) \tag{68.}$$

sein, unter $\pi_*^{(i)}(\xi, \eta)$ die Lösungen der Integralgleichung

$$\pi_*^{(i)}(\xi,\eta) - \frac{1}{2\pi}\iint_{\Theta_*}\Big[a_*(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial}{\partial\xi_1}G_*(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$$

$$+ b_*(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial}{\partial\eta_1}G_*(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) + c_*(\xi_1,\eta_1)G_*(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\Big]\pi_*^{(i)}(\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1 = 0$$

verstanden. G_* ist die zu Θ_* gehörige klassische *Green*sche Funktion.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Funktionen

$$\pi_0^{(i)}(x,y) = \pi_*^{(i)}(\xi,\eta) \qquad (i=1,2,\dots p)$$

die auf S verschwindenden, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung (18.) darstellen. Außerhalb des Einheitskreises sind diese Lösungen der Gleichung

$$\pi_*^{(i)}(\xi,\eta) = -\pi_*^{(i)}(\xi_1,\eta_1) \qquad (i=1,2,\dots p)$$

gemäß definiert. Hieraus und aus (15.) folgt nun leicht in der Tat die Beziehung (68.).

Als Endergebnis unserer Betrachtungen ergibt sich auch bei der Randwertaufgabe mit gemischten Randbedingungen die bekannte Alternative: *Entweder ist die nicht homogene Randwertaufgabe eindeutig lösbar oder die zugehörige homogene Randwertaufgabe hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen.*

§ 2. Die zu den gemischten Randbedingungen gehörige *Green*sche Funktion.

In den folgenden Betrachtungen wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung $A^*(u_*) = 0$, somit gewiß auch das Randwertproblem der Differentialgleichung $\bar{L}(U) = F$ mit gemischten Randbedingungen eindeutig lösbar ist*).

Es sei (x', y') ein Punkt in T oder $\bar{T}$ und (x_1', y_1') der zu (x', y') in bezug auf S konjugierte Punkt. Die entsprechenden Punkte des Gebietes Θ_* seien mit (ξ', η') und (ξ_1', η_1') bezeichnet**). Es sei $\mathfrak{G}_*(\xi', \eta'; \xi, \eta)$ die auf Σ_* verschwindende *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $A^*(u_*) = 0$ und

$$(69.) \qquad \Gamma_*(\xi', \eta'; \xi, \eta) = \mathfrak{G}_*(\xi', \eta'; \xi, \eta) + \mathfrak{G}_*(\xi_1', \eta_1'; \xi, \eta).$$

Ist (ξ_1, η_1) der zu (ξ, η) konjugierte Punkt, so ist

---

*) Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten, auch wenn die obige Voraussetzung nicht erfüllt ist, wenn nur die nicht homogene Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\bar{L}(U) = F$ eindeutig lösbar ist.

**) Die Punkte (ξ', η') und (ξ_1', η_1') sind konjugiert.

$$\Gamma_*(\xi', \eta'; \xi_1, \eta_1) \equiv \Gamma''_*(\xi', \eta'; \xi, \eta),$$

wie man leicht findet, gleichfalls diejenige in Θ_*, außer in (ξ', η') und (ξ'_1, η'_1), reguläre, auf Σ_* verschwindende Lösung der Differentialgleichung $A^*(u_*) = 0$, die in den ausgeschlossenen Punkten sich entsprechend wie

$$-\tfrac{1}{2}\log|(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2| \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}\log|(\xi'_1-\xi)^2+(\eta'_1-\eta)^2|$$

verhält. Offenbar ist daher

$$(70.) \quad \Gamma_*(\xi', \eta'; \xi_1, \eta_1) \equiv \Gamma''_*(\xi', \eta'; \xi, \eta) \equiv \Gamma_*(\xi', \eta'; \xi, \eta).$$

Hieraus folgt, wie sich leicht zeigen läßt, daß für alle (ξ, η) auf Σ' die partielle Ableitung von Γ_* in der Richtung der Normale verschwindet. Setzt man für alle (x', y') in T

$$(71.) \qquad \Gamma(x', y'; x, y) = \Gamma_*(\xi', \eta'; \xi, \eta),$$

so ist Γ diejenige, außer in (x', y'), in T und auf S stetige, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $A(u) = 0$, die sich in (x', y') wie

$$-\log \varrho' = -\tfrac{1}{2}\log|(x'-x)^2+(y'-y)^2|$$

verhält, auf $\underline{S}$ verschwindet und auf $\overline{S}$ die Beziehung

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = 0$$

erfüllt. *Γ ist die zu den vorgelegten gemischten Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung* $A(u) = 0$. In der Umgebung von (x', y') sind die Ausdrücke

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial x}\left|\log|(x'-x)^2+(y'-y)^2|\right|^{-1}, \quad \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}\left|\log|(x'-x)^2+(y'-y)^2|\right|^{-1}, \quad \Gamma_0 = \Gamma + \log \varrho'$$

beschränkt.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Gamma_*}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Gamma_*}{\partial \eta}$ sind noch auf Σ_* stetig. Man überzeugt sich leicht, daß auch $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}$ auf der ganzen Peripherie S von T, die Endpunkte von $\overline{S}$ ausgenommen, sich stetig verhalten. In der Umgebung eines Endpunktes (p, q) der Bögen $\underline{S}$ und $\overline{S}$ ist

$$(72.) \qquad \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right| < A_{30}[(p-x)^2+(q-y)^2]^{-\frac{1}{4}}.$$

Aus (69.) und (71.) folgt fast unmittelbar, daß die Funktion Γ für alle (x', y') auf $\overline{S}$ (*Endpunkte eingeschlossen*) und alle (x, y) in T und auf S, außer wenn $x = x', y = y'$, sich stetig verhält. Für alle nicht zusammenfallenden Punktepaare (x, y) und (x', y') in T und auf S ist schließlich

$$(73.) \quad |\Gamma(x', y'; x, y)| < A_{31}\left|\log|(x'-x)^2+(y'-y)^2|\right| + A_{32}.$$

Wir nehmen von jetzt ab an, daß auch die zu der Differentialgleichung $M(u)=0$ gehörige, denselben gemischten Randbedingungen genügende *Green*sche Funktion $H(x', y'; x, y)$ existiert. Es sei $u(x, y)$ eine in T und auf S stetige, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta(u)=f$, die auf $\underline{S}$ die Werte $\varphi(s)$ annimmt, während auf $\overline{S}$ die Beziehung $\frac{\partial u}{\partial n}=g(s)$ gilt. Die Funktionen $\varphi(s)$ und $g(s)$ mögen so gewählt sein, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sowohl auf $\underline{S}$ als auch auf $\overline{S}$ stetig sind, in den gemeinsamen Endpunkten (p, q) von $\underline{S}$ und $\overline{S}$ sich aber wie $[(p-x)^2+(q-y)^2]^{-\frac{1}{4}}$ verhalten. Setzt man in der *Green*schen Formel

$$(74.)\quad \iint_T [w' M(w'')-w'' \Delta(w')]\,dx\,dy=-\int_S \Big(w'\frac{\partial w''}{\partial n}-w''\frac{\partial w'}{\partial n}\Big)ds-\int_S w'w''(a\,dy-b\,dx)$$

für w' und w'' entsprechend $u(x, y)$ und $H(x', y'; x, y)$ ein, unter (x', y') einen Punkt in T verstanden, so erhält man die Beziehung

$$(75.)\quad \begin{aligned} u(x', y')=&-\frac{1}{2\pi}\iint_T H(x', y; x, y) f(x, y)\,dx\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}}\frac{\partial}{\partial n}H(x', y'; t)\,\varphi(t)\,dt \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\overline{S}} H(x', y'; t)\,g(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\overline{S}} H(x', y'; x, y)\,u(x, y)(a\,dy-b\,dx). \end{aligned}$$

Diese Formel gilt, wie wir nunmehr beweisen wollen, *auch bei beliebigen abteilungsweise stetigen Werten* $\varphi(s)$ *und* $g(s)$.

Wir müssen indessen erst einige vorbereitende Betrachtungen durchführen.

Es sei $\varphi^{(1)}(s), \varphi^{(2)}(s), \ldots$ eine Folge auf $\underline{S}$ erklärter stetiger Funktionen, die in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von $\underline{S}$ gegen $\varphi(s)$ gleichmäßig konvergieren,

$$(76.)\qquad \lim_{k=\infty}\varphi^{(k)}(s)=\varphi(s).$$

Überdies soll für alle k

$$(77.)\qquad |\varphi^{(k)}(s)|<A_{33}$$

sein. Es sei analog $g^{(k)}(s)$ $(k=1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge auf S erklärter stetiger Funktionen, die, außer in den Unstetigkeitspunkten von $g(s)$, gegen $g_0(s)$ gleichmäßig konvergieren und für alle k den Bedingungen

$$(78.)\qquad |g^k(s)|<A_{34},\quad \int_S g^{(k)}(s)\,ds=0$$

genügen. Es sei $w^{(k)}(x, y)$ diejenige in T reguläre Potentialfunktion, die den Bedingungen

$$\frac{\partial w^{(k)}(x, y)}{\partial n} = g^{(k)}(s), \quad w^{(k)}(0, 0) = 1 \tag{79.}$$

genügt. Es sei $u^{(k)}(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $A(u) = f$, die auf $\underline{S}$ gleich $\varphi^{(k)}(s)$ wird und auf $\overline{S}$ die Beziehung

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n} = g^{(k)}(s) \tag{80.}$$

erfüllt. Die Funktion

$$u^{(k)}(x, y) - w^{(k)}(x, y) = u_0^{(k)}(x, y) \tag{81.}$$

ergibt in bekannter Weise eine Lösung $u_*^{(k)}(\xi, \eta)$ der Differentialgleichung

$$A_*(u_*^{(k)}) = f_*^{(k)}(\xi, \eta). \tag{82.}$$

Ihre Randwerte auf Σ_* mögen $\varphi_*^{(k)}(\sigma_*)$ heißen. Außer in einer endlichen Anzahl von Punkten ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$\lim_{k=\infty} \varphi_*^{(k)}(\sigma_*) = \varphi_*(\sigma_*). \tag{83.}$$

In jedem ganz im Innern von Θ_* enthaltenen Gebiete ist ferner

$$\lim_{k=\infty} f_*^{(k)}(\xi, \eta) = f_*(\xi, \eta). \tag{84.}$$

In (83.) und (84.) ist der Grenzübergang gleichmäßig. Für alle k ist schließlich

$$|\varphi_*^{(k)}(\sigma_*)| < A_{35}, \tag{85.}$$

$$|f_*^{(k)}(\xi, \eta)| < A_{36} \left| \log \frac{1}{\varrho^*} \right| + A_{37}, \tag{86.}$$

unter ϱ^* wie in § 1 dieses Kapitels den kleinsten Wert der Entfernung des Punktes (ξ, η) von den Linien Σ_* und Σ' verstanden. Aus dem am Schluß des § 1 des ersten Kapitels abgeleiteten Satze folgt nunmehr, daß für alle (ξ, η) in Θ_* und auf Σ_*, die etwaigen Unstetigkeitspunkte von $\varphi_*(\sigma_*)$ ausgenommen,

$$\lim_{k=\infty} u_*^{(k)}(\xi, \eta) = u_*(\xi, \eta), \tag{87.}$$

somit, außer in den etwaigen Unstetigkeitsstellen von $\varphi(s)$,

$$\lim_{k=\infty} u^{(k)}(x, y) = u(x, y). \tag{88.}$$

Der Grenzübergang ist in jedem die Ausnahmepunkte nicht enthaltenden Teile von Θ_* bzw. T gleichmäßig*).

---

*) An der zitierten Stelle wird $f(x, y)$ festgehalten. Es wäre indessen leicht, durch eine Wiederholung des dort eingeschlagenen Verfahrens den Satz in der hier erforderlichen allgemeineren Fassung zu beweisen.

Es mögen jetzt speziell $\varphi^{(k)}(s)$ auf $\underline{S}$ erklärte analytische Funktionen sein. Auch die Funktionen $g^{(k)}(s)$ werden auf S durchweg regulär analytisch vorausgesetzt. Es ist leicht zu sehen, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u^{(k)}(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u^{(k)}(x,y)}{\partial y}$, außer in den Endpunkten (p, q) von $\underline{S}$ und $\bar{S}$, auf S stetig sind. In der Umgebung eines Punktes (p, q) ist jedenfalls

$$\left|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}\right| < A_{38}[(x-p)^2+(y-q)^2]^{-\frac{1}{4}}. \tag{89.}$$

Betrachten wir in der Tat die Funktion

$$u^{(k)}(x, y) - w^{(k)}(x, y) = u_0^{(k)}(x, y).$$

Sie führt in bekannter Weise zu einer Lösung $u_*^{(k)}(\xi, \eta)$ der Differentialgleichung $A^*(u_*^{(k)}) = f_*^{(k)}$. Ihre Randwerte sind, wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt, stetig und haben stetige Ableitung erster sowie abteilungsweise stetige Ableitung zweiter Ordnung. Den im Kapitel I §§ 1 und 3 abgeleiteten Sätzen zufolge sind auf Σ_* die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_*^{(k)}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u_*^{(k)}}{\partial \eta}$ vorhanden und stetig. Hieraus folgt aber ohne weiteres unsere Behauptung.

Nach (75.) gilt für $u^{(k)}(x, y)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x', y') = &-\frac{1}{2\pi}\iint_T H(x', y'; x, y) f(x, y)\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}} \frac{\partial}{\partial n} H(x', y'; t)\, \varphi^{(k)}(t)\, dt \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{S}} H(x', y'; t) g^{(k)}(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{S}} H(x', y'; x, y)\, u^{(k)}(x, y)(a\, dy - b\, dx). \end{aligned} \tag{90.}$$

Geht man jetzt zur Grenze $k = \infty$ über, so erhält man die gewünschte Formel

$$\begin{aligned} u(x', y') = &-\frac{1}{2\pi}\iint_T H(x', y'; x, y) f(x, y)\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}} \frac{\partial}{\partial n} H(x', y'; t)\, \varphi(t)\, dt \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{S}} H(x', y'; t) g(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{S}} H(x', y'; x, y)\, u(x, y)(a\, dy - b\, dx). \end{aligned} \tag{91.}$$

Sie gilt also in der Tat für beliebige abteilungsweise stetige Funktionen $\varphi(s)$ und $g(s)$.

Es sei s_0 ein beliebiger von den Randpunkten (p, q) verschiedener Punkt auf $\bar{S}$. Läßt man den Punkt (x', y') in s_0 übergehen, so erhält man

$$u(s_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T H(s_0; x, y) f(x, y)\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}} \frac{\partial}{\partial n} H(s_0; t)\, \varphi(t)\, dt$$
$$(92.) \qquad -\frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}} H(s_0; t)\, g(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}} H(s_0; x, y)\, u(x, y)(a\, dy - b\, dx).$$

Aus (92.) folgt sofort, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}} \frac{\partial}{\partial n} H(s_0; t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine auf $\bar{S}$ (*Endpunkte inbegriffen*) stetige Funktion von s_0 darstellt. Denn sowohl $u(s_0)$ als auch das erste, dritte und vierte Glied auf der rechten Seite der Gleichung (92.) haben, einzeln betrachtet, den bekannten Eigenschaften der Funktion H zufolge*) diese Eigenschaft.

*) Vgl. die Entwicklungen auf S. 100 bis 102.

Inhaltsübersicht.

		Seite
Kapitel I.	Das erste Randwertproblem. Abteilungsweise stetige Koeffizienten	53
	§ 1. Reguläre Lösungen	53
	§ 2. Reguläre Lösungen (Fortsetzung)	60
	§ 3. Eindeutigkeitssätze	64
	§ 4. Lösungen als Funktionen der Koeffizienten	67
	§ 5. Eindeutigkeitssätze (Fortsetzung)	70
	§ 6. Die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion	71
	§ 7. Asymptotisches Verhalten der *Green*schen Funktion am Rande des Gebietes	77
Kapitel II.	Das zweite Randwertproblem	81
	§ 1. Reguläre Lösungen	81
	§ 2. Die zum zweiten Randwertproblem gehörige *Green*sche Funktion	90
Kapitel III.	Gemischte Randbedingungen	93
	§ 1. Reguläre Lösungen	93
	§ 2. Die zu den gemischten Randbedingungen gehörige *Green*sche Funktion	100

Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen.

Von Herrn *H. Brandt* in Straßburg i. E.

Einleitung.

Die Theorie der Komposition der binären quadratischen Formen ist von *Gauß* begründet worden. Außer den binären können nur noch die quaternären und die Formen mit 8 Variabeln eine Kompositionstheorie besitzen, wie Herr *Hurwitz* gezeigt hat*). Was die Komposition der quaternären Formen anlangt, so sind darüber bisher nur Einzelheiten bekannt. *Euler* hat eine Identität angegeben, die das Produkt zweier Summen von 4 Quadraten wieder als Summe von 4 Quadraten darstellt, und *Lagrange* zeigte, daß eine ähnliche Formel besteht, wenn man die Summe von 4 Quadraten durch die Form $x_0^2 + ax_1^2 + bx_2^2 + abx_3^2$ ersetzt**). Endlich fand *Hermite* zwei allgemeinere Formeln, die die vorigen als Spezialfälle einschließen und sich auf gewisse quaternäre Formen von quadratischer Determinante beziehen, nämlich auf Formen von der Gestalt $x_0^2 + F(x_1\, x_2\, x_3)$ und $Dx_0^2 + f(x_1\, x_2\, x_3)$ wo f eine ternäre quadratische Form, D ihre Determinante und F ihre Adjungierte bedeutet***).

Im folgenden wollen wir, ohne an die genannten früheren Ergebnisse anzuknüpfen, von algebraischen Betrachtungen ausgehen, die, obwohl wir dabei nur die quaternären Formen im Auge haben, mit geringen

*) *A. Hurwitz*, Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln, Gött. Nachr. 1898.

**) *P. Bachmann*, Zahlentheorie IV, 1 S. 14; *Euler*, Comment. arithm. coll. I S. 543; *Lagrange*, Abh. in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1770.

***) *Ch. Hermite*, Sur la théorie des formes quadratiques; dieses Journal Bd. 47 oder Oeuvres vol. I p. 212.

Änderungen auch für die binären und die Formen mit 8 Variabeln gültig sind. Wir werden zunächst die für uns wichtigen Eigenschaften einer bilinearen Substitution untersuchen, die eine Form in das Produkt zweier andern transformiert, und dabei den Satz gewinnen: *Wenn eine bilineare Substitution eine Form A in das Produkt BC zweier anderen transformiert, so gibt es zwei weitere bilineare Substitutionen, die aus der ersten durch rationale Operationen abgeleitet werden können, von denen die eine die Form B in das Produkt AC, die andre die Form C in das Produkt AB transformiert**).* Die drei bilinearen Substitutionen bilden ein ganz symmetrisches Tripel. Während wir in den ersten drei Abschnitten die Koeffizienten der Formen und bilinearen Substitutionen als beliebige komplexe Zahlen annehmen, gehen wir weiter dazu über, sie als reell und dann als rational vorauszusetzen. Es zeigen sich dann wesentliche Unterschiede gegen eine entsprechende Theorie bei binären Formen. Im ersten Fall müssen die Determinanten positiv, im zweiten sogar rationale Quadratzahlen sein. In den beiden letzten Abschnitten nehmen wir die Koeffizienten der Formen und der bilinearen Substitutionen als ganze rationale Zahlen an. Wir definieren den Begriff der Komposition, beschränken uns dabei aber der Einfachheit halber auf eigentlich primitive Formen von gleicher Determinante. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine primitive Form eine Komposition zuläßt, sind dann einfach die folgenden: *Die Form muß eine quadratische Determinante und eine durch die Wurzel aus der Determinante teilbare Adjungierte besitzen.*

1. Die Transformation einer quaternären quadratischen Form in das Produkt zweier solcher Formen.

Wir gehen aus von einer quaternären quadratischen Form, die wir durch

$$A(xx) = \sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, x_k \text{ **)} \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

bezeichnen. Wenn wir auf die Variabeln der Form eine bilineare Substitution

(1.) $$x_i = \sum_{jk} m_{ijk}\, y_j\, z_k \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

---

*) Ein ähnlicher Satz wurde für binäre Formen von Herrn Dr. *A. Speiser* in der *Weber*-Festschrift bewiesen.

**) Die Summierung soll immer, wenn nichts anderes bemerkt ist, von 0 bis 3 erstreckt werden.

ausüben, so geht sie über in eine homogene Funktion der y_ι und der z_ι, die in jeder der beiden Variabelnreihen quadratisch ist. Wir werden nun den Fall ins Auge fassen, wo diese Funktion in zwei Faktoren, von denen der eine nur die y_ι, der andre nur die z_ι als Variable enthält, also in das Produkt zweier quadratischen Formen gespalten werden kann. Bezeichnet man diese Formen durch

$$B(yy) = \sum_{\iota k} b_{\iota k}\, y_\iota\, y_k \quad (b_{\iota k} = b_{k\iota}), \quad C(zz) = \sum_{\iota k} c_{\iota k}\, z_\iota\, z_k \quad (c_{\iota k} = c_{k\iota}),$$

so besteht vermöge (1.) die Identität

$$(2.) \qquad A(xx) = B(yy) \cdot C(zz).$$

Wir sagen dann: Die Form A wird durch die bilineare Substitution (1.) in das Produkt der Formen B und C transformiert, A ist die zu transformierende Form, und B und C sind die beiden transformierten Formen. Über die Koeffizienten der Formen sowohl wie die der bilinearen Substitution machen wir vorläufig keinerlei einschränkende Annahmen. Sie seien also beliebige komplexe Zahlen. Nur wollen wir die Determinanten der Formen als von Null verschieden und der Einfachheit halber auch als gleich voraussetzen*); ihr Wert sei D. Wir führen ein

$$(3.) \qquad \sum_j m_{\iota jk}\, y_j = s_{\iota k}(y), \quad \sum_l m_{\iota kl}\, z_l = \mathfrak{t}_{\iota k}(z);$$

dadurch nimmt die bilineare Substitution (1.) die Gestalt an

$$(4.) \qquad x_\iota = \sum_\iota s_{\iota k}(y)\, z_k \quad \text{oder} \quad x_\iota = \sum_\iota \mathfrak{t}_{\iota k}(z)\, y_k.$$

Sie kann also in zweifacher Weise als gewöhnliche lineare Substitution geschrieben werden mit Koeffizienten, die das eine Mal die y_ι, das andre Mal die z_ι als Parameter enthalten. (Zur Bezeichnungsweise der Substitutionen wurde ein lateinischer und ein deutscher Buchstabe gewählt, um eine später hervortretende Symmetrie besser zum Ausdruck bringen zu können.) Führt man (4.) in (2.) ein, so ergeben sich wegen

$$(5.) \qquad a_{\iota k} = a_{k\iota}, \quad b_{\iota k} = b_{k\iota}, \quad c_{\iota k} = c_{k\iota}$$

die beiden Formeln

$$(6.) \quad \sum_{\iota k} a_{\iota k}\, s_{\iota\alpha}(y)\, s_{k\beta}(y) = B(yy) \cdot c_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\iota k} a_{\iota k}\, \mathfrak{t}_{\iota\alpha}(z)\, \mathfrak{t}_{k\beta}(z) = C(zz) \cdot b_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

---

*) Ist nur die erste Bedingung erfüllt, so kann man Zahlen b, c (bis auf Faktoren $\pm 1, \pm i$ eindeutig) so bestimmen, daß nach Multiplikation beider Seiten von (2.) mit $a = bc$ die Formen aA, bB, cC auch der zweiten genügen.

Im folgenden wollen wir uns öfter der abkürzenden Schreibweise der Matrizenrechnung bedienen. Dabei bezeichnen wir ein quadratisches System von 16 Zahlgrößen $a_{ik}\,(i,k=0,1,2,3)$ durch $\boldsymbol{a}$ oder Linearformen $r_{ik}(x)$ durch $\boldsymbol{r}(x)$. Das System, das durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten entsteht, unterscheiden wir von dem ursprünglichen durch einen Akzent und nennen es „transponiertes System", indem wir diese ältere *Gauß*sche Bezeichnungsweise der sonst häufig üblichen „konjugiertes System" vorziehen. Die Formeln (6.) können dann einfach in der Gestalt

$$(7.)\qquad \boldsymbol{s}'(y)\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{s}(y)=B(yy)\,\boldsymbol{c},\qquad \mathfrak{t}'(z)\,\boldsymbol{a}\,\mathfrak{t}(z)=C(zz)\,\boldsymbol{b}$$

geschrieben werden. Durch Übergang von den Systemen zu den Determinanten ergibt sich aus (6.) oder (7.) nach beiderseitiger Quadratwurzelziehung

$$(8.)\qquad |s_{ik}(y)|=\varepsilon_2\,[B(yy)]^2,\qquad |\mathfrak{t}_{ik}(z)|=\varepsilon_3\,[C(zz)]^2,$$

wenn ε_2 und ε_3 positive oder negative Einheiten bedeuten. Die beiden Systeme von Linearformen $\boldsymbol{s}(y)$ und $\mathfrak{t}(z)$ wollen wir als „*Antistrophen*" bezeichnen, indem wir eine in der Gruppentheorie übliche Bezeichnungsweise verwenden. Der Inhalt der Formel (8.) lautet dann in Worten: *Die Determinanten der Antistrophen sind die positiv oder negativ genommenen Quadrate der transformierten Formen.*

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung des Wertes der Determinante, die aus den Linearformen

$$(9.)\qquad \varrho_{ik}(x)=\sum_j m_{jik}x_j \qquad (i,k=0,1,2,3)$$

gebildet ist. Das System $\varrho(x)$ dieser Linearformen soll nach einer ebenfalls aus der Gruppentheorie entlehnten Bezeichnungsweise „*Parastrophe*" heißen. Die Parastrophe und die beiden Antistrophen nennen wir zusammen die Linearformsysteme der bilinearen Substitution (1.). Versteht man unter der Inversen des Systems $\boldsymbol{a}$ die Matrix $\boldsymbol{a}^{-1}$, die durch die Gleichung $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^{-1}=\boldsymbol{a}^{-1}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}$ definiert ist, wo $\boldsymbol{e}$ die Matrix der identischen Substitution bedeutet, so erhält man aus (7.), wenn man von den Systemen selbst zu ihren Inversen übergeht, nach einer einfachen Umformung die beiden Gleichungen

$$(10.)\qquad \boldsymbol{s}(y)\,\boldsymbol{c}^{-1}\,\boldsymbol{s}'(y)=B(yy)\cdot\boldsymbol{a}^{-1},\qquad \mathfrak{t}(z)\,\boldsymbol{b}^{-1}\,\mathfrak{t}'(z)=C(zz)\cdot\boldsymbol{a}^{-1}.$$

(Dabei ist von dem bekannten Satze Gebrauch gemacht, daß man die

Inverse eines Produkts erhält, indem man das in umgekehrter Reihenfolge genommene Produkt der Inversen der Faktoren bildet.) Setzt man

(11.) $$d = \sqrt{D},$$

wo die Wurzel in einem beliebigen aber bestimmten Sinne zu nehmen ist, so haben die Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit den Koeffizientensystemen

(12.) $$\mathfrak{a} = d \cdot \boldsymbol{a}^{-1}, \quad \mathfrak{b} = d \cdot \boldsymbol{b}^{-1}, \quad \mathfrak{c} = d \cdot \boldsymbol{c}^{-1}$$

alle wie A, B, C dieselbe Determinante D. Offenbar können sie auch als die durch d dividierten Adjungierten von A, B, C dargestellt werden. Wir nennen $\mathfrak{A}$ die *Reziproke* von A; dann ist auch umgekehrt A die Reziproke von $\mathfrak{A}$. Ebenso sind B und $\mathfrak{B}$ wie auch C und $\mathfrak{C}$ einander reziproke Formen. Statt (10.) kann man dann wegen (12.) auch schreiben

(13.) $$\boldsymbol{s}(y)\mathfrak{c}\boldsymbol{s}'(y) = B(yy) \cdot \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{t}(z)\mathfrak{b}\mathfrak{t}'(z) = C(zz) \cdot \mathfrak{a},$$

und wenn man sich der Bedeutung von $\boldsymbol{s}(y)$ und $\mathfrak{t}(z)$ erinnert, so besagt von diesen beiden Gleichungen die erste, daß die Identität

(14.) $$\mathfrak{C}(zz) = B(yy) \cdot \mathfrak{A}(xx)$$

für die bilineare Substitution

(15.) $$z_i = \sum_{jk} m_{kji} y_j x_k,$$

und die zweite, daß die Identität

(16.) $$\mathfrak{B}(yy) = C(zz)\mathfrak{A}(xx)$$

für die bilineare Substitution

(17.) $$y_i = \sum_{jk} m_{jik} x_j z_k$$

besteht. Die bilinearen Substitutionen, die man aus der ursprünglichen erhält, indem man bei allen Koeffizienten den ersten Index mit dem zweiten oder mit dem dritten vertauscht, sind also ebenfalls imstande, quadratische Formen in das Produkt zweier anderen zu transformieren.

Wenn man zu (14.) und (15.) einerseits und zu (16.) und (17.) andrerseits die zu (7.) analogen Formeln aufstellt, so erhält man außer den beiden Gleichungen (13.) wegen (9.) noch die folgenden

(18.) $$\boldsymbol{\varrho}(x)\mathfrak{c}\boldsymbol{\varrho}'(x) = \mathfrak{A}(xx) \cdot \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{\varrho}'(x)\mathfrak{b}\boldsymbol{\varrho}(x) = \mathfrak{A}(xx) \cdot \boldsymbol{c},$$

und aus beiden ergibt sich durch Übergang zu den Determinanten

(19.) $$|\varrho_{ik}(x)| = \varepsilon_1 [\mathfrak{A}(xx)]^2,$$

wenn ε_1 das Vorzeichen bedeutet, das vorläufig unbestimmt bleibt und erst später gleich $-\varepsilon_2 \varepsilon_3$ gefunden werden wird.

Die parastrophe Determinante ist also bis auf das Vorzeichen das Quadrat der Reziproken der zu transformierenden Form.

2. Koordinierte bilineare Substitutionen.

Wir haben gesehen, daß die Linearformsysteme der bilinearen Substitution (1.) die übereinstimmende Eigenschaft haben, Determinanten zu besitzen, die bis auf das Vorzeichen die Quadrate gewisser quadratischer Formen sind. Wir behaupten, daß in allen Systemen die Unterdeterminanten durch die betreffenden Formen teilbar sind. Da die Parastrophe selbst als Antistrophe dargestellt werden kann, so genügt es, diesen Nachweis für die antistrophen Systeme zu führen.

Sind $\boldsymbol{S}(y)$ und $\mathfrak{T}(z)$ die Systeme der Unterdeterminanten von $\boldsymbol{s}(y)$ und $\mathfrak{t}(z)$ und $\boldsymbol{S}'(y)$ und $\mathfrak{T}'(z)$ ihre Transponierten, so folgt aus (8.) nach elementaren Determinantensätzen

$$(20.)\quad \boldsymbol{s}(y)\,\boldsymbol{S}'(y)=\boldsymbol{S}'(y)\,\boldsymbol{s}(y)=\varepsilon_2[B(yy)]^2\cdot\boldsymbol{e},\quad \mathfrak{t}(z)\,\mathfrak{T}'(z)=\mathfrak{T}'(z)\,\mathfrak{t}(z)=\varepsilon_3[C(zz)]^2\cdot\boldsymbol{e}.$$

Wenn nun $\boldsymbol{S}(y)$ durch $B(yy)$ und $\mathfrak{T}(z)$ durch $C(zz)$ teilbar ist, so sind die Elemente der durch die Gleichungen

$$(21.)\qquad \boldsymbol{S}'(y)=\varepsilon_2\,B(yy)\,\mathfrak{s}(y),\qquad \mathfrak{T}'(z)=\varepsilon_3\,C(zz)\,\boldsymbol{t}(z)$$

definierten Systeme $\mathfrak{s}(y)$ und $\boldsymbol{t}(z)$ Linearformen und genügen zudem wegen (20.) den Gleichungen

$$(22.)\qquad \boldsymbol{s}(y)\,\mathfrak{s}(y)=\mathfrak{s}(y)\,\boldsymbol{s}(y)=B(yy)\cdot\boldsymbol{e},\qquad \boldsymbol{t}(z)\,\mathfrak{t}(z)=\mathfrak{t}(z)\,\boldsymbol{t}(z)=C(zz)\cdot\boldsymbol{e},$$

und diese kann man durch die Linearformsysteme

$$(23.)\qquad \mathfrak{s}(y)=\boldsymbol{c}^{-1}\,\boldsymbol{s}'(y)\,\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{t}(z)=\boldsymbol{b}^{-1}\,\mathfrak{t}'(z)\,\boldsymbol{a}$$

befriedigen, wie sich aus (7.) und (10.) ergibt. Umgekehrt folgt daraus nach (20.) das Bestehen von (21.), also die Richtigkeit unsrer Behauptung.

Wir bezeichnen wegen (22.) die Linearformsysteme $\boldsymbol{s}(y)$ und $\mathfrak{s}(y)$ als *reziprok in bezug auf die Form* $B(yy)$ und ebenso $\boldsymbol{t}(z)$ und $\mathfrak{t}(z)$ als reziprok in bezug auf die Form $C(zz)$. Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir auch schlechthin von einander reziproken Linearformsystemen sprechen. Wir bemerken noch, daß reziproke Linearformsysteme sich gegenseitig durch (22.) eindeutig bestimmen (vorausgesetzt natürlich, daß es sich um Systeme der von uns betrachteten Art handelt).

Aus den Formeln (23.) leitet man unter Beachtung von (22.) die beiden wichtigen Gleichungen her

(24.) $$\mathfrak{s}'(y)\, c\, \mathfrak{s}(y) = B(yy)\cdot a, \qquad t'(z)\, b\, t(z) = C(zz)\cdot a,$$

von denen die erste besagt, daß die Form $C(zz)$ durch die Substitution $z_i = \sum_k \mathfrak{s}_{ik}(y)\, x_k$ in $A(xx)\cdot B(yy)$, und die zweite, daß $B(yy)$ durch die Substitution $y_i = \sum_k t_{ik}(z)\, x_k$ in $C(zz)\cdot A(xx)$ transformiert wird. So wie wir früher zu der bilinearen Substitution (m_{ijk}) die beiden antistrophen Systeme gebildet haben, so fassen wir jetzt umgekehrt $\mathfrak{s}(y)$ und $t(z)$ als Antistrophen zweier neuen bilinearen Substitutionen auf. Wir setzen

(25.) $$t_{ik}(z) = \sum_j n_{ijk}\, z_j, \qquad \mathfrak{s}_{ik}(y) = \sum_l o_{ikl}\, y_l,$$

so daß $t(z)$, die Reziproke der ursprünglichen zweiten Antistrophe, erste Antistrophe der bilinearen Substitution (n_{ijk}) und $\mathfrak{s}(y)$, die Reziproke der ursprünglichen ersten Antistrophe, zweite Antistrophe einer bilinearen Substitution (o_{ijk}) wird.

Wir behaupten dann, daß die drei bilinearen Substitutionen, die wir der Einfachheit halber jede durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen wollen, ein ganz symmetrisches Tripel bilden. Jede von ihnen bestimmt die beiden andern, so wie die erste die beiden letzten. Oder ausführlich gesprochen: Geht man von einer von ihnen aus, bildet die Antistrophen, dazu in bezug auf die betreffenden Formen die reziproken Linearformsysteme, so ist die Reziproke der zweiten Antistrophe die erste Antistrophe der einen und die Reziproke der ersten Antistrophe gerade die zweite Antistrophe der andern der beiden übrigen bilinearen Substitutionen.

Nach Definition bestimmt m in der angegebenen Weise n und o. Außerdem erkennt man leicht, daß m sicher eine der beiden je durch n und o bestimmten bilinearen Substitutionen ist. Um das einzusehen, braucht man nämlich nur von (24.) ausgehend, die Systeme $\mathfrak{s}(y)$ und $t(z)$ als gegeben anzunehmen und sieht dann, daß die dazu in bezug auf $B(yy)$ beziehungsweise $C(zz)$ reziproken Linearformsysteme gerade die früheren Systeme $s(y)$ und $\mathfrak{t}(z)$ sind. Was gezeigt werden muß, ist also nur, daß auch n und o sich gegenseitig bestimmen. Bildet man

(26.) $$r_{ik}(x) = \sum_j o_{ijk}\, x_j, \qquad \mathfrak{r}_{ik}(x) = \sum_l n_{ikl}\, x_l,$$

so findet das dann und nur dann statt, wenn die Systeme $r(x)$ und $\mathfrak{r}(x)$ in bezug auf $A(xx)$ reziprok sind, d. h. wenn die Bedingungen

(27.) $$\sum_j r_{ij}(x)\, \mathfrak{r}_{jk}(x) = \sum_j \mathfrak{r}_{ij}(x)\, r_{jk}(x) = A(xx)\, e_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

erfüllt sind. Daß dies der Fall ist, erkennt man folgendermaßen. Löst man von den beiden Gleichungssystemen (4.), denen zufolge die Identität (2.) besteht, das erste nach den z_ι, das zweite nach den y_ι auf, so ergibt sich wegen (22.)

$$(28.) \qquad B(yy)\, z_\iota = \sum_k \mathfrak{s}_{\iota k}(y)\, x_k, \qquad C(zz)\, y_\iota = \sum_k t_{\iota k}(z)\, x_k.$$

Nun ist aber nach (25.) und (26.)

$$(29.) \qquad \sum_k \mathfrak{s}_{\iota k}(y)\, x_k = \sum_k r_{\iota k}(x)\, y_k, \qquad \sum_k t_{\iota k}(z)\, x_k = \sum_k \mathfrak{r}_{\iota k}(x)\, z_k,$$

so daß anstelle von (28.) auch geschrieben werden kann

$$(30.) \qquad B(yy)\, z_\iota = \sum_k r_{\iota k}(x)\, y_k, \qquad C(zz)\, y_\iota = \sum_k \mathfrak{r}_{\iota k}(x)\, z_k.$$

Wenn man nun in diesen Formeln einmal die linke Seite der ersten in die rechte der zweiten, das andere Mal die linke Seite der zweiten in die rechte der ersten einsetzt, so ergibt sich wegen (2.) sofort die Richtigkeit von (27.). Man sieht auch leicht, daß die Forderung, daß die x_ι durch (4.) gegeben sein sollen, für (27.) keine Beschränkung mehr bedeutet, so daß diese Beziehung identisch in den x_ι besteht.

Damit ist gezeigt, daß die bilinearen Substitutionen $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{o}$ ein ganz symmetrisches Tripel bilden. Jede von ihnen bestimmt in der angegebenen Weise die beiden andern und hat die Eigenschaft, eine der 3 Formen A, B, C in das Produkt der beiden andern zu transformieren. Die 6 Antistrophen von $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{o}$ sind paarweise in bezug auf je eine der 3 Formen reziprok.

Fassen wir die Ergebnisse in Formeln zusammen und bezeichnen dabei die Variabeln der zu transformierenden Formen, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, durch große Buchstaben, so haben wir die Identitäten

$$A(XX) = B(yy)\, C(zz) \text{ für die bilineare Substitution } X_\iota = \sum_{jk} m_{\iota jk}\, y_j\, z_k,$$

$$(31). \quad B(YY) = C(zz)\, A(xx) \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \;\; Y_\iota = \sum_{jk} n_{\iota jk}\, z_j\, x_k,$$

$$C(ZZ) = A(xx)\, B(yy) \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \;\; Z_\iota = \sum_{jk} o_{\iota jk}\, x_j\, y_k,$$

und die Antistrophen

$$(32.) \qquad \begin{array}{llllll} \boldsymbol{s}(y) & \text{und} & \mathfrak{t}(z) & \text{der bilinearen Substitution} & \boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{t}(z) & ,, & \mathfrak{r}(x) & ,, \quad ,, \quad ,, & \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{r}(x) & ,, & \mathfrak{s}(x) & ,, \quad ,, \quad ,, & \boldsymbol{o} \end{array}$$

genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(x)\,\mathfrak{r}(x) &= \mathfrak{r}(x)\,\boldsymbol{r}(x) = A(xx)\cdot\boldsymbol{e}, \\ \boldsymbol{s}(y)\,\mathfrak{s}(y) &= \mathfrak{s}(y)\,\boldsymbol{s}(y) = B(yy)\cdot\boldsymbol{e}, \\ \boldsymbol{t}(z)\,\mathfrak{t}(z) &= \mathfrak{t}(z)\,\boldsymbol{t}(z) = C(zz)\cdot\boldsymbol{e}. \end{aligned} \tag{33.}$$

Wegen dieser Eigenschaften bezeichnen wir $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{o}$ als *koordinierte bilineare Substitutionen.*

Wenn wir auf die Variabeln der drei Formen gleichzeitig die Substitutionen

$$x_\iota = \sum_k \alpha_{\iota k}\, x'_k, \qquad y_\iota = \sum_k \beta_{\iota k}\, y'_k, \qquad z_\iota = \sum_k \gamma_{\iota k}\, z'_k \tag{34.}$$

ausüben, deren Determinanten wir, wenigstens bis auf das Vorzeichen, als gleich und von Null verschieden annehmen wollen, so mögen dadurch die Formen in $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ und die bilinearen Substitutionen in $\tilde{\boldsymbol{m}}, \tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{o}}$, übergehen. Es zeigt sich dann, daß die Gleichungen (31.) bestehen bleiben, wenn man sich überall die transformierten Größen eingesetzt denkt. Dasselbe gilt aber für (33.), wie die einfache Überlegung ergibt, in welcher Weise die Systeme (32.) transformiert werden. Man muß dabei beachten, daß eine auf die Variabeln der zu transformierenden Form ausgeübte Substitution bei der bilinearen Substitution eine Zusammensetzung mit dem inversen System bewirkt. So drücken sich z. B. die Koeffizienten von $\tilde{\boldsymbol{m}}$ durch die Gleichung aus

$$\tilde{m}_{\iota jk} = \sum_{\lambda\mu\nu} \overline{\alpha}_{\iota\lambda}\, m_{\lambda\mu\nu}\, \beta_{\mu j}\, \gamma_{\nu k}, \tag{35.}$$

wenn $\overline{\alpha}_{\iota k}$ die Elemente des zu $\boldsymbol{\alpha}$ inversen Systems $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ sind.

Daß für $\tilde{\boldsymbol{m}}, \tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{o}}$ zu (31.) und (33.) analoge Gleichungen bestehen, besagt, daß $\tilde{\boldsymbol{m}}, \tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{o}}$ zueinander koordiniert sind. Die Eigenschaft dreier bilinearen Substitutionen, zueinander koordiniert zu sein, geht also durch die gleichzeitig ausgeübten Transformationen (34.) nicht verloren.

3. Die Vorzeichen der Linearformdeterminanten.

Wir bezeichnen die Parastrophe von $\boldsymbol{n}$ mit $\sigma(y)$ und die von $\boldsymbol{o}$ mit $\tau(z)$, setzen also

$$\sum_j y_j\, n_{j\iota k} = \sigma_{\iota k}(y), \qquad \sum_j z_j\, o_{j\iota k} = \tau_{\iota k}(z). \tag{36.}$$ $(\iota, k = 0, 1, 2, 3)$

Dann sind, um die Bezeichnungsweise noch einmal zusammenzufassen,

$$\begin{aligned} &\varrho(x), \boldsymbol{s}(y), \mathfrak{t}(z) && \text{die Linearformsysteme von } \boldsymbol{m}, \\ &\sigma(y), \boldsymbol{t}(z), \mathfrak{r}(x) && \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \boldsymbol{n}, \\ &\tau(z), \boldsymbol{r}(x), \mathfrak{s}(y) && \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \boldsymbol{o}. \end{aligned} \tag{37.}$$

Zwischen den Vorzeichen der Determinanten dieser Linearformsysteme bestehen sehr bemerkenswerte und einfache Beziehungen, die wir herleiten wollen. Wir behaupten nämlich, daß die Determinanten gleichnamiger Systeme, d. h. die von $\varrho(x), r(x), \mathfrak{r}(x)$ und die von $\sigma(y), s(y), \mathfrak{s}(y)$ und endlich die von $\tau(z), t(z), \mathfrak{t}(z)$ jedesmal dasselbe Vorzeichen haben. Es genügt, dies für ein Tripel, etwa $\varrho(x), r(x), \mathfrak{r}(x)$ nachzuweisen.

Zunächst trifft diese Behauptung zu, wenn es sich um die Transformation einer Summe von 4 Quadraten in das Produkt zweier solcher Summen handelt. Denn in diesem Falle ist sogar $\varrho(x) = r'(x) = \mathfrak{r}(x)$, weil wegen $a = b = c = e$ ein Vergleich der ersten Formeln von (7.) und (22.) ergibt, daß notwendig $s'(y) = \mathfrak{s}(y)$ sein muß, woraus wegen der Bedeutung dieser Systeme $\varrho(x) = r'(x)$ und aus Symmetriegründen auch $r'(x) = \mathfrak{r}(x)$ folgt. Versteht man dann unter den Transformationen (34.) diejenigen, die eine Summe von 4 Quadraten der Reihe nach in A, B, C überführen, und beobachtet man ihre Wirkung auf $\varrho(x), r(x), \mathfrak{r}(x)$, so ergibt sich leicht, daß die Determinanten dieser Systeme, die bis auf das Vorzeichen den Wert $(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$ hatten, ihr Zeichen gleichzeitig ändern oder gleichzeitig nicht ändern, je nachdem die Moduln der Substitutionen β und γ sich durch den Faktor -1 unterscheiden oder nicht. Man muß dabei nur beachten, daß die Variabeln der Parastrophe, wie aus (35.) folgt, kontragredient, also durch die Substitution $x_\iota = \sum_k \overline{\alpha}_{k\iota}\, x'_k$ zu transformieren sind.

Da man umgekehrt auch von drei beliebigen Formen A, B, C durch lineare Transformationen zu Summen von Quadraten übergehen kann, so ist die obige Behauptung, daß in (37.) die Determinanten gleichnamiger Systeme dasselbe Zeichen haben, damit bewiesen. Wir sind jetzt imstande, die Werte dieser Determinanten hinzuschreiben. Wir haben

$$
\begin{array}{lll}
|\varrho_{ik}(x)| = \varepsilon_1[\mathfrak{A}(xx)]^2, & |s_{ik}(y)| = \varepsilon_2[B(yy)]^2, & |\mathfrak{t}_{ik}(z)| = \varepsilon_3[C(zz)]^2, \\
|\sigma_{ik}(y)| = \varepsilon_2[\mathfrak{B}(yy)]^2, & |t_{ik}(z)| = \varepsilon_3[C(zz)]^2, & |\mathfrak{r}_{ik}(x)| = \varepsilon_1[A(xx)]^2, \\
|\tau_{ik}(z)| = \varepsilon_3[\mathfrak{C}(zz)]^2, & |r_{ik}(x)| = \varepsilon_1[A(xx)]^2, & |\mathfrak{s}_{ik}(y)| = \varepsilon_2[B(yy)]^2.
\end{array} \tag{38.}
$$

Wie man sieht, erhält man aus einer Zeile dieses Gleichungssystems die beiden andern durch zyklische Vertauschung der Buchstaben: A, B, C; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; x, y, z; ϱ, σ, τ; r, s, t; $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ und der Indizes 1, 2, 3.

Wir haben schon oben bemerkt, daß die Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nicht voneinander unabhängig, sondern der Bedingung

(39.) $$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1$$

unterworfen sind. Zum Beweise bemerken wir zuerst, daß das Produkt $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ gegenüber linearen Transformationen invariant ist, so daß wir die Richtigkeit von (39.) nur noch in einem einfachen Falle, etwa dem der Transformation einer Summe von 4 Quadraten in das Produkt zweier solcher Summen zu zeigen brauchen. Hält man auch in diesem Fall an der allgemeinen Bezeichnungsweise fest und versieht nur die Systeme mit einem Index 0, so genügt wegen (7.) das System $s^0(y)$ der Gleichung

(40.) $$s^{0\prime}(y)\, s^0(y) = (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \cdot e;$$

daraus folgert man, wenn

(41.) $$s^0(y) = s_0^0 y_0 + s_1^0 y_1 + s_2^0 y_2 + s_3^0 y_3$$

gesetzt wird, für die s_ι^0 $(\iota = 0, 1, 2, 3)$, die gewöhnliche von den y_ι unabhängige Substitutionen sind, die Bedingungen

(42.) $$\begin{aligned} s_\iota^{0\prime}\, s_\iota^0 &= e, && (\iota = 0, 1, 2, 3) \\ s_\iota^{0\prime}\, s_k^0 + s_k^{0\prime}\, s_\iota^0 &= 0, && \left(\begin{smallmatrix} \iota \\ k \end{smallmatrix} = 0, 1, 2, 3;\ \iota \neq k\right) \end{aligned}$$

von denen die erste die s_ι^0 als orthogonale Substitutionen charakterisiert. Durch eine auf die x_ι oder die z_ι ausgeübte orthogonale Transformation, kann man erreichen, daß $s_0^0 = e$ die identische Substitution wird. Nach der zweiten Bedingung (42.) folgt aber aus

(43.) $$s_0^0 = e, \text{ daß } s_k^{0\prime} + s_k^0 = 0 \text{ ist.} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

s_1^0, s_2^0, s_3^0 sind also schiefsymmetrische Systeme. Denkt man sich auch $\varrho^0(x)$ und $\mathfrak{t}^0(z)$ entsprechend (41.) zerlegt

(44.) $$\varrho^0(x) = \varrho_0^0 x_0 + \varrho_1^0 x_1 + \varrho_2^0 x_2 + \varrho_3^0 x_3, \qquad \mathfrak{t}^0(z) = \mathfrak{t}_0^0 z_0 + \mathfrak{t}_1^0 z_1 + \mathfrak{t}_2^0 z_2 + \mathfrak{t}_3^0 z_3,$$

so sind die Systeme ϱ_ι^0 der Reihe nach aus gleichen Zeilen, die Systeme $\mathfrak{t}_\iota^0$ der Reihe nach aus gleichen Spalten der s_ι^0 gebildet. Weil aber die Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ durch die Determinanten von $\varrho_\iota^0, s_\iota^0, \mathfrak{t}_\iota^0$ für irgendein i gegeben werden, so folgt aus der soeben gemachten Bemerkung wegen (43.), daß ε_1 und ε_3 entgegengesetzte Werte haben. Da aus $s_0^0 = e$ noch $\varepsilon_2 = +1$ folgt, so ist die Richtigkeit der Gleichung (39.) in einem Fall, auf den alle andern durch lineare Transformation zurückgeführt werden können, also auch allgemein bewiesen.

Das Vorzeichen der parastrophen Determinante ist also bestimmt, wenn die Vorzeichen der beiden antistrophen Determinanten gegeben sind.

Es gibt demnach für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nur 4 mögliche Kombinationen, nämlich $-++$, $++-$, $+-+$, $---$. Nennt man die Transformation einer Form in das Produkt zweier andern oder auch die sie vermittelnde bilineare Substitution positiv, negativ oder unbestimmt, je nachdem die Vorzeichen der antistrophen Determinanten beide positiv, beide negativ oder verschieden sind, so gilt nach dem Gleichungssystem (38.) der Satz:

Ist eine Transformation negativ, so sind auch die koordinierten negativ, ist sie positiv, so sind die koordinierten unbestimmt.

Im Zusammenhang hiermit steht eine Bezeichnungsweise, die *Gauß* für binäre Formen anwendet, die aber ohne weiteres auf quaternäre Formen ausgedehnt werden kann. Danach wird die Form B bei der Transformation direkt oder indirekt genommen, je nachdem ε_3, und ebenso C, je nachdem ε_2 positiv oder negativ ist. (Disq. arith. 235.)

4. Reelle und rationale Transformationen.

Wir verlassen jetzt die Allgemeinheit unserer Voraussetzungen und werden beschränkende Annahmen über die Natur der Koeffizienten der Formen und bilinearen Substitutionen machen.

Wir nennen die Transformation einer Form in das Produkt zweier andern reell oder rational, wenn die Koeffizienten der Formen sowohl wie die der bilinearen Substitution reell oder rational sind. Ist eine Transformation reell oder rational, so sind auch die koordinierten Transformationen, wie sich aus ihrer Definition ergibt, reell oder rational. Um die Bedingungen der reellen und dann der rationalen Transformation zu untersuchen, bilden wir nach (1.) und (9.)

$$(45.) \qquad \sum_i x_i \xi_i = \sum_{ijk} m_{ijk} \xi_i y_j z_k = \sum_{ik} \varrho_{ik}(\xi)\, y_i z_k .$$

Setzt man die erste Gleichung (30.), die bei beliebigen y_i und z_i für durch (1.) gegebene x_i also in unserm Fall gültig ist, in die rechte Seite ein, so erhält man die Identität

$$(46.) \qquad B(yy) \sum_i x_i \xi_i = \sum_{ijk} \varrho_{ij}(\xi)\, r_{jk}(x)\, y_i y_k ,$$

und ein Vergleich der beiderseitigen Koeffizienten von $y_i y_k$ ergibt

$$(47.) \qquad 2\left(\sum_i x_i \xi_i\right) \cdot b_{ik} = \sum_j \varrho_{ij}(\xi)\, r_{jk}(x) + \sum_j \varrho_{kj}(\xi)\, r_{ji}(x) ,$$

wofür man nach der Schreibweise der Matrizenrechnung auch setzen kann:

$$(47^a.) \qquad 2\sum_i x_i \xi_i \cdot b = \varrho(\xi) r(x) + r'(x) \varrho'(\xi).$$

Wählt man die Zahlen x_i, die ja jetzt ganz beliebig sind, besonders so, daß

$$(48.) \qquad \sum_i x_i \xi_i = 0,$$

was auf mannigfache Weise möglich ist, so wird das zusammengesetzte System $\varrho(\xi) r(x)$ schiefsymmetrisch, was bekanntlich, da die Zeilenzahl gerade ist, zur Folge hat, daß seine Determinante als Quadrat einer gewissen homogenen Funktion der Elemente des Systems dargestellt werden kann. Nun hat die Determinante nach (38.) den Wert

$$(49.) \qquad |\varrho_{ik}(\xi)||r_{ik}(x)| = [\mathfrak{A}(\xi\xi) A(xx)]^2.$$

Es ist also $A(xx)\mathfrak{A}(\xi\xi)$ eine homogene Funktion der Elemente des zusammengesetzten Systems $\varrho(\xi) r(x)$, demnach reell für reelle und rational für rationale Transformationen. Weil aber $A(xx)$ nicht für alle der Bedingung (48.) unterworfene Wertsysteme x_i verschwinden kann und außerdem mit der Transformation gleichzeitig reell oder rational ist, so muß auch

$$(50.) \qquad \mathfrak{A}(\xi\xi) = \frac{\text{adj } A(\xi\xi)}{\sqrt{D}},$$

wo adj $A(\xi\xi)$ die Adjungierte von $A(\xi\xi)$ bedeutet, reell oder rational sein, je nachdem die Transformation es ist.

Nur diejenigen Formen können sich demnach reell in das Produkt zweier andern transformieren lassen, die eine reelle, und diejenigen rational, die eine rationale Reziproke besitzen.

Handelt es sich um reelle Transformationen, so muß wie (50.) zeigt, die Determinante positiv sein, d. h. die Formen sind entweder definit oder indefinit und dann vom Trägheitsindex 2. Weil nur solche Formen, die denselben Index haben, sich reell durch eine lineare Transformation ineinander überführen lassen, so erkennt man aus der Tatsache, daß A in $B \cdot C$ transformiert werden kann, in einfacher Weise, daß nur folgende 3 Fälle möglich sind. Entweder müssen A, B, C gleichzeitig den Index 2 haben, oder die Formen sind gleichzeitig definit, und zwar entweder alle drei positiv oder eine positiv, zwei negativ. Der letzte Fall unterscheidet sich übrigens wenig von dem vorhergehenden, da er durch Multiplikation der negativen Formen mit -1, wobei die Identität $A = B \cdot C$ bestehen bleibt, auf diesen zurückgeführt werden kann. Weil eine Summe von 4 positiven Quadraten in das Produkt zweier Summen von 4 Quadraten und eine Summe von

2 positiven und 2 negativen Quadraten in das Produkt zweier solcher Summen transformiert werden kann (nach den bekannten Formeln von *Euler* und *Lagrange**)), so sind die angegebenen Bedingungen auch hinreichend. Bedeuten A, B, C irgend drei reelle Formen, die ihnen genügen, so läßt sich eine reelle bilineare Substitution angeben, die A in das Produkt $B \cdot C$ transformiert.

Handelt es sich dagegen um rationale Transformationen, so muß nach (50.) die Determinante eine rationale Quadratzahl sein. Umgekehrt ist diese Bedingung, wie sich noch zeigen wird, auch hinreichend dafür, daß eine Form eine rationale Transformation in das Produkt zweier andern zuläßt.

5. Eine Identität für quaternäre Formen.

Um den Beweis für die letzte Behauptung zu erbringen, wollen wir eine Identität herleiten, die uns auch weiterhin nützlich sein wird.

Bedeutet $A(xx) = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ eine quaternäre Form mit nicht verschwindender Determinante D und einem von Null verschiedenen Koeffizienten a_{00}, so ist identisch, wie ein Vergleich beider Seiten zeigt,

$$a_{00} A(xx) = A_{0x}^2 + f(xx), \tag{51.}$$

wenn

$$A_{0x} = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + a_{03} x_3 \tag{52.}$$

gesetzt ist, und

$$f(xx) = \sum_{ik}{}' b_{ik} x_i x_k \text{ **)}, \quad \text{wo} \qquad (i, k = 1\ 2, 3)$$
$$b_{ik} = a_{00} a_{ik} - a_{0i} a_{0k} \tag{53.}$$

eine ternäre Form bedeutet, die wir nach *Hermite* die von A abgeleitete Form nennen wollen***). Ebenso hat man

$$a_{00} A(xy) = A_{0x} A_{0y} + f(xy), \quad A(xy) = \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k, \quad f(xy) = \sum_{ik}{}' b_{ik} x_i y_k. \tag{54.}$$

Die Form f hat die Determinante $a_{00}^2 D$; denn die quaternäre Form $X_0^2 + f(XX)$, die offenbar dieselbe Determinante wie f hat, enthält die quaternäre Form $A_{0x}^2 + f(xx)$, die nach (51.) die Determinante $a_{00}^4 D$ hat, durch eine Substitution vom Modul a_{00}, nämlich durch die Substitution

---

*) a. a. O.; vgl. S. 106, Anm. **).

**) Σ' bedeutet eine Summation von 1 bis 3, Σ eine solche von 0 bis 3.

***) *Ch. Hermite*, Oeuvres I p. 123.

(55.) $$X_0 = a_{00}\,x_0 + a_{01}\,x_1 + a_{02}\,x_2 + a_{03}\,x_3, \qquad X_\iota = x_\iota, \qquad (\iota = 1,2,3)$$

woraus die Behauptung folgt.

Wenn die Unterdeterminanten des dreireihigen Systems $\|b_{\iota k}\|$ durch $B_{\iota k}$ und die des vierreihigen Systems $\|a_{\iota k}\|$ durch $A_{\iota k}$ bezeichnet werden, so gilt die Beziehung

(56.) $$B_{\iota k} = a_{00}\,A_{\iota k}. \qquad (\iota, k = 1,2,3)$$

Das bestätigt man leicht durch Ausrechnen; doch kann man es auch folgendermaßen einsehen. Wenn die Form $X_0^2 + f(XX)$ durch die Substitution (55.) in $a_{00}\,A(xx)$ übergeht, so folgt nach einfachen Sätzen aus der Theorie der linearen Transformation der quadratischen Formen, daß die durch das Quadrat des Substitutionsmoduls dividierte Adjungierte von $a_{00}\,A(xx)$, also die Form mit den Koeffizienten $a_{00}\,A_{\iota k}$ durch die zu (55.) transponierte Substitution

(57.) $$X_0 = a_{00}\,x_0, \qquad X_\iota = a_{0\iota}\,x_0 + x_\iota \qquad (\iota = 1,2,3)$$

in die Adjungierte von $X_0^2 + f(XX)$ übergeht. Weil nun durch (57.) nur die Koeffizienten der ersten Zeile und ersten Spalte geändert werden, so folgt sofort die Richtigkeit von (56.).

Wir schreiben

(58.) $$D = d^2, \qquad A_{\iota k} = d\,\mathfrak{a}_{\iota k}, \qquad (\iota, k = 0,1,2,3)$$

so daß nach (56.)

(59.) $$B_{\iota k} = a_{00}\,d\,\mathfrak{a}_{\iota k}, \qquad (\iota, k = 1,2,3)$$

und bezeichnen die Form mit den Koeffizienten $\mathfrak{a}_{\iota k}$ $(\iota, k = 1, 2, 3)$ durch φ; dann ist nach (59.) $a_{00}\,d\cdot\varphi$ die Adjungierte von f und umgekehrt f die Adjungierte von φ*), und es besteht die bekannte Identität

(60.) $$f(xx)\,f(yy) - f(xy)^2 = a_{00}\,d\,\varphi(ss),$$

wenn

(61.) $$s_1 = x_2\,y_3 - x_3\,y_2, \qquad s_2 = x_3\,y_1 - x_1\,y_3, \qquad s_3 = x_1\,y_2 - x_2\,y_1$$

gesetzt ist. Mit ihrer Hülfe bestätigt man nach (51.) und (54.) die Richtigkeit der folgenden Formel

(62.) $$a_{00}^2\{A(xx)A(yy) - A(xy)^2\} = A_{0y}^2 f(xx) - 2\,A_{0x}\,A_{0y} f(xy) + A_{0x}^2 f(yy) + a_{00}\,d\,\varphi(ss).$$

Andererseits hat man auch

(63.) $$f(zz) = A_{0y}^2 f(xx) - 2\,A_{0x}\,A_{0y}\,f(xy) + A_{0x}^2\,f(yy) + a_{00}\,d\,\varphi(ss),$$

wenn

---

*) Es ist also $b_{11} = \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{a}_{23}^2$, $b_{12} = \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_{21}\mathfrak{a}_{33}$ usw.

(64.) $z_\iota = A_{0x} y_\iota - A_{0y} x_\iota + \varphi_\iota(s)$, wobei $\varphi_\iota(s) = a_{\iota 1} s_1 + a_{\iota 2} s_2 + a_{\iota 3} s_3$, $(\iota = 1, 2, 3)$
gesetzt wird, was man durch Einsetzen unter Beachtung von $x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 = y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3 = 0$ bestätigt. Faßt man die Formeln (62.) bis (64.) zusammen, so erhält man folgende Identität. Es wird

$$A(xx)\, A(yy) = z_0^2 + f(zz), \tag{65.}$$

wenn gesetzt wird

$$z_0 = A(xy), \qquad z_\iota = \frac{1}{a_{00}} \{ A_{0x} y_\iota - A_{0y} x_\iota + \varphi_\iota(s) \}. \qquad (\iota = 1, 2, 3) \tag{66.}$$

Die bilineare Substitution (66.) hat (dann und nur dann) lauter rationalzahlige Koeffizienten, wenn die Form A rational und ihre Determinante ein rationales Quadrat ist.

Denkt man sich die Form $z_0^2 + f(zz)$ durch eine rationale lineare Substitution vom Modul $\frac{1}{a_{00}}$ in eine solche von der Determinante D übergeführt und geht dann zu einer koordinierten Transformation über, so erkennt man, daß die am Schluß des vorigen Abschnitts aufgestellte Behauptung zutrifft. Die Bedingung, daß die Determinante einer rationalen Form eine rationale Quadratzahl ist, ist also nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür, daß sie sich rational in das Produkt zweier Formen mit derselben quadratischen Determinante transformieren läßt.

6. Begriff der Komposition. Hauptformen und Hauptklassen.

Wenn die Identität (2.) für die bilineare Substitution (1.) besteht und alle Koeffizienten $a_{\iota k}, b_{\iota k}, c_{\iota k}$ und $m_{\iota jk}$ ganze rationale Zahlen sind, so sprechen wir von *ganzzahliger Transformation.* Die Determinanten der Formen nehmen wir wieder als gleich an. Nach dem 4. Abschnitt ist die Determinante eine Quadratzahl und die Reziproke von A jedenfalls rational. Weil aber ihr Quadrat ganzzahlig ist, da es nach (19.) bis auf das Vorzeichen den Wert der parastrophen Determinante darstellt, so ist sie notwendig sogar ganzzahlig.

Eine Form kann sich demnach nur dann ganzzahlig in das Produkt zweier andern transformieren lassen, wenn sie eine ganzzahlige Reziproke, d. h. eine quadratische Determinante $D = d^2$ und eine durch d teilbare Adjungierte besitzt. Sind die beiden transformierten Formen B und C primitiv*), woraus übrigens nach (7.) auch die Primitivität von A folgt,

*) primitiv immer im Sinne von eigentlich primitiv.

so schließt man aus den Gleichungen (21.), daß die Linearformsysteme $s(y)$ und $t(z)$, also die koordinierten bilinearen Substitutionen ganzzahlig sind. Es ist also B ganzzahlig in AC und C ganzzahlig in AB transformierbar; demnach besitzen auch die Formen B und C wie A notwendig ganzzahlige Reziproken.

Wir nennen eine primitive Form, die ganzzahlig in das Produkt zweier primitiven Formen transformiert werden kann, aus diesen beiden Formen *zusammengesetzt* oder *komponiert*, wenn die Transformation positiv ist.

Nach dem vorigen können nur diejenigen primitiven Formen eine Komposition zulassen, die eine quadratische Determinante und eine durch die Wurzel aus der Determinante teilbare Adjungierte besitzen.

Wir wollen zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Zum Beweise gehen wir aus von den Gleichungen (65.) und (66.). Genügt die Form A den angegebenen Bedingungen, so ist zunächst die bilineare Substitution (66.) sicher ganzzahlig, wenn $a_{00} = 1$ ist. Dann ist aber die Form $A(xx)$ der Form $x_0^2 + f(xx)$, wo f die in (53.) angegebene Bedeutung hat, äquivalent; denn diese wird durch die Substitution (55.) vom Modul $a_{00} = 1$ in jene übergeführt. Nehmen wir A gleich in der Gestalt $x_0^2 + f(xx)$ an, so erhalten wir aus (65.) und (66.)

(67.) $$(x_0^2 + f(xx))\,(y_0^2 + f(yy)) = z_0^2 + f(zz) \quad \text{für}$$

(68.) $$z_0 = x_0\,y_0 + f(x\,y), \qquad z_\iota = x_0\,y_\iota - y_0\,x_\iota + \varphi_\iota(s), \qquad (\iota = 1, 2, 3)$$

gelangen also zu der bekannten Formel von *Hermite*, da f die Adjungierte von φ ist. Die beiden antistrophen Determinanten der bilinearen Substitution (68) haben verschiedenes Vorzeichen. Die Transformation ist also unbestimmt; doch kann man sie leicht in eine positive verwandeln, etwa dadurch, daß man statt (68.)

(68ª.) $$z_0 = x_0\,y_0 - f(xy), \qquad z_\iota = x_0\,y_\iota + x_\iota\,y_0 + \varphi_\iota(s) \qquad (\iota = 1, 2, 3)$$

einführt. Im Sinne der obigen Definition handelt es sich dann um eine Komposition. Wir können demnach den Satz aussprechen: *Eine quaternäre quadratische Form, die die Zahl 1 darstellt, läßt sich dann und nur dann mit sich selbst zu sich selbst zusammensetzen, wenn ihre Determinante eine Quadratzahl $D = d^2$ und ihre Adjungierte durch d teilbar ist.*

Jede Form von diesen Eigenschaften nennen wir eine *Hauptform* und die Klasse, der sie angehört, eine *Hauptklasse*, weil diese Formen bei der Komposition der quaternären Formen eine ähnliche Rolle spielen wie

diejenigen binären, die nach *Gauß* so genannt werden, bei der Komposition der binären Formen. Ein wesentlicher Unterschied dieser Theorie gegenüber besteht aber darin, daß es bei quaternären Formen für eine Determinante $D = d^2$ im allgemeinen verschiedene Hauptklassen gibt. Hauptformen, die verschiedenen Klassen angehören, lassen sich nicht zusammensetzen. Denn aus der Zusammensetzbarkeit zweier Formen, die die 1 darstellen, folgert man leicht ihre Äquivalenz. Dagegen lassen sich Hauptformen einer Klasse stets zusammensetzen und durch die Zusammensetzung entstehen alle und auch nur solche Formen, die derselben Klasse angehören.

7. Die Zusammensetzung zweier entgegengesetzten primitiven Formen zu einer Hauptform.

$A(xx)$ sei wieder eine primitive Form mit der Determinante $D = d^2$ und einer durch d teilbaren Adjungierten. Den ersten Koeffizienten a_{00} wollen wir jetzt von 1 verschieden und außerdem zu $2D$ prim annehmen, was keine wesentliche Einschränkung bedeutet. Die bilineare Substitution (66.), für die die Identität

$$A(xx)\,A(yy) = z_0^2 + f(zz) \tag{65.}$$

besteht, können wir nach einer einfachen Umrechnung auch in der Gestalt

$$z_0 = A(xy), \qquad z_\iota = \sigma_\iota + \frac{1}{a_{00}} \sum_k{}' \alpha_{\iota k}\, \varepsilon_k \qquad (\iota = 1, 2, 3) \tag{66ª.}$$

schreiben, wenn

$$\sigma_\iota = x_0\, y_\iota - y_0\, x_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3) \tag{69.}$$

gesetzt ist und die Größen $\alpha_{\iota k}$ $(\iota, k = 1, 2, 3)$ die Elemente des Systems

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} + a_{03} & \alpha_{13} - a_{02} \\ \alpha_{21} - a_{03} & \alpha_{22} & \alpha_{23} + a_{01} \\ \alpha_{31} + a_{02} & \alpha_{32} - a_{01} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \tag{70.}$$

bedeuten. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, eine lineare Substitution

$$z'_\iota = \sum_k{}' \delta_{\iota k}\, z_k \qquad (\iota = 1, 2, 3) \tag{71.}$$

mit dem Modul a_{00} zu bestimmen von folgenden beiden Eigenschaften. Durch sie wird die bilineare Substitution (66ª.), die übrigens, wie sich leicht zeigen läßt, den Nenner a_{00} nicht nur scheinbar, sondern tatsächlich enthält, in eine ganzzahlige transformiert, und es existiert eine ternäre Form

$$g(z'z') = \sum_{\iota k}{}' c_{\iota k}\, z'_\iota\, z'_k \tag{72.}$$

mit ganzzahligen c_{ik}, die durch (71.) in die Form $f(zz)$ übergeführt wird. Die erste Forderung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die Kongruenzen

$$(73.) \qquad \sum_j{}' \delta_{ij}\, \alpha_{jk} \equiv 0 \quad (a_{00}) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

bestehen. Wegen der zweiten Forderung muß eine ganzzahlige Matrix $\boldsymbol{c}$ existieren, die der Gleichung

$$(74.) \qquad \delta' \boldsymbol{c}\, \delta = \boldsymbol{b}$$

genügt. Bedeutet Δ das zu δ adjungierte System, so schließt man aus (74.) wegen $|\delta_{ik}| = a_{00}$

$$(75.) \qquad \Delta \boldsymbol{b}\, \Delta' = a_{00}^2 \cdot \boldsymbol{c}.$$

Da man aus (75.) umgekehrt auch (74.) folgert, so ist die Existenz einer Matrix $\boldsymbol{c}$ von den gesuchten Eigenschaften gesichert, wenn die Kongruenzen

$$(76.) \quad \Delta \boldsymbol{b}\, \Delta' \equiv 0 \quad (a_{00}^2) \quad \text{oder} \quad \sum_{pq}{}' b_{pq}\, \Delta_{ip}\, \Delta_{kq} \equiv 0 \quad (a_{00}^2) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

erfüllt sind. Diese erweisen sich aber schon als eine Folgerung der Kongruenzen (73.), so daß wir nur ihnen durch ein System $\| \delta_{ik} \|$ von der Determinante $|\delta_{ik}| = a_{00}$ zu genügen brauchen.

In der Tat, wenn das System $\delta \cdot \alpha$ durch a_{00} teilbar ist, so ist zunächst auch $\delta \cdot \alpha \cdot \delta'$ durch a_{00} teilbar. Wenn man nun α zerlegt in einen symmetrischen Teil

$$(77.) \qquad \mathfrak{a} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\| \text{*)}$$

und einen schiefsymmetrischen

$$(78.) \qquad \boldsymbol{a}^0 = \left\| \begin{matrix} 0 & a_{03} & -a_{02} \\ -a_{03} & 0 & a_{01} \\ a_{02} & -a_{01} & 0 \end{matrix} \right\|,$$

so daß

$$(79.) \qquad \alpha = \mathfrak{a} + \boldsymbol{a}^0,$$

so schließt man aus der Tatsache, daß $\delta\, \boldsymbol{a}^0\, \delta'$ wieder schiefsymmetrisch ist, daß $2\, \delta\, \mathfrak{a}\, \delta'$, also auch, da a_{00} ungerade angenommen ist, $\delta\, \mathfrak{a}\, \delta'$ durch a_{00} teilbar ist. Durch Übergang zu dem adjungierten System folgert man daraus, da $\boldsymbol{b}$ das zu $\mathfrak{a}$ adjungierte System ist, daß $\Delta \boldsymbol{b}\, \Delta'$ durch a_{00}^2 teilbar sein muß, womit die Behauptung bewiesen ist.

---

*) $\mathfrak{a}$ hat hier natürlich eine von der früheren verschiedene Bedeutung.

Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, daß man den Kongruenzen (73.) durch ein System δ von der Determinante $|\delta_{ik}| = a_{00}$ genügen kann. Daß das möglich ist, ergibt sich sogleich aus einem Satz von Herrn *Frobenius**), auf den wir Bezug nehmen wollen. Danach besitzt ein System von 3 homogenen linearen Kongruenzen mit 3 Unbekannten

$$(80.) \qquad \sum_{i}{}' x_i \alpha_{ik} \equiv 0 \quad (a_{00}) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

3 Auflösungen, deren Determinante den Wert

$$(81.) \qquad H = \frac{a_{00}^3}{a_1 a_2 a_3}$$

hat, wenn a_1, a_2, a_3 der Reihe nach die größten gemeinsamen Teiler bedeuten, die der Modul a_{00} mit den Elementarteilern e_1, e_2, e_3 des Systems α gemeinsam hat.

Um die Elementarteiler von α zu bestimmen, berechnen wir die Determinante $|\alpha_{ik}|$ und bilden das zu α adjungierte System. Für die Determinante ergibt sich zunächst

$$|\alpha_{ik}| = |\mathfrak{a}_{ik}| + \sum_{ik}{}' \mathfrak{a}_{ik} a_{0i} a_{0k}, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

und dafür erhält man wegen $|\mathfrak{a}_{ik}| = a_{00} \cdot d$ und

$$(82.) \qquad a_{00}\mathfrak{a}_{i0} + a_{01}\mathfrak{a}_{i1} + a_{02}\mathfrak{a}_{i2} + a_{03}\mathfrak{a}_{i3} = \begin{cases} d & (i = 0) \\ 0 & (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

einfach

$$(83.) \qquad |\alpha_{ik}| = a_{00}^2 \cdot \mathfrak{a}_{00}.$$

Das zu α adjungierte System wird nach einer leichten Rechnung, bei der man außer (53.) und (82.) noch beachten muß, daß $\mathfrak{b}$ das zu $\mathfrak{a}$ adjungierte System ist, gleich dem a_{00}-fachen von

$$(84.) \qquad \mathsf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} - \mathfrak{a}_{03} & a_{13} + \mathfrak{a}_{02} \\ a_{21} + \mathfrak{a}_{03} & a_{22} & a_{23} - \mathfrak{a}_{01} \\ a_{31} - \mathfrak{a}_{02} & a_{32} + \mathfrak{a}_{01} & a_{33} \end{Vmatrix} \text{**)}$$

gefunden. Bezeichnet man mit ϑ den größten gemeinsamen Teiler aller α_{ik}, mit θ den aller A_{ik}, so daß $a_{00}\theta$ der Teiler des zu α adjungierten Systems ist, so sind

---

*) *Frobenius*, Theorie der linearen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten, dieses Journal, Bd. 86, S. 182; s. auch *Bachmann*, Zahlentheorie IV, 1, S. 358.

**) Da die Determinante von A $a_{00}\mathfrak{a}_{00}^2$ ist, kann man $\delta = \mathsf{A}'$ annehmen, wenn $\mathfrak{a}_{00} = 1$, kann aber auch, wenn $\mathfrak{a}_{00} \neq 1$, für die praktische Bestimmung von δ von dem System A' ausgehen.

$$e_1 = \vartheta, \quad e_2 = \frac{a_{00}\,\theta}{\vartheta}, \quad e_3 = \frac{a_{00}^2\,\mathfrak{a}_{00}}{a_{00}\,\theta} = \frac{a_{00}\,\mathfrak{a}_{00}}{\theta}$$

die Elementarteiler von α. Weil nun die Zahlen ϑ und θ, wie man aus ihrer Definition schließt, in $2D$ aufgehen, so sind sie notwendig zu a_{00} teilerfremd. Für die größten gemeinsamen Teiler der Elementarteiler mit dem Modul a_{00} erhält man also:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_{00}, \quad a_3 = a_{00}.$$

Demnach ist nach (81.) $H = a_{00}$; den Kongruenzen (73.) kann man also durch ein System δ von der Determinante $H = |\delta_{ik}| = a_{00}$ genügen.

Da die allgemeine Theorie der linearen Kongruenzen auch einen Weg angibt, die 3 Auflösungen der Kongruenzen (80.) mit der Determinante $H = a_{00}$, also das gesuchte System δ tatsächlich zu finden, so ist unsere oben gestellte Aufgabe, eine lineare Substitution (71.) von den beiden geforderten Eigenschaften zu bestimmen, jetzt vollständig gelöst. Das Koeffizientensystem c der ternären Form (72.) ergibt sich aus (75.) und läßt sich darstellen als das zu dem ganzzahligen System $\frac{1}{a_{00}}\,\delta\,\mathfrak{a}\,\delta'$ adjungierte System, woraus hervorgeht, daß die quaternäre Form $z_0^2 + g(zz)$ eine Hauptform ist. Die Transformation dieser Form in das Produkt der beiden Formen $A(xx)$ und $A(yy)$, deren Existenz wir jetzt nachgewiesen haben, ist unbestimmt, weil die bilineare Substitution (66.) es ist. Sie läßt sich aber dadurch leicht in eine positive verwandeln, daß man auf die eine der Formen A eine unimodulare Substitution von der Determinante -1 ausübt, also etwa statt einer Variabeln ihren negativen Wert einführt. A möge dadurch in $\bar{A}$ übergehen. Wir bezeichnen A und $\bar{A}$ als entgegengesetzte Formen und ihre Klassen als entgegengesetzte Klassen. Da es sich jetzt um eine Komposition handelt, so können wir unter Berücksichtigung der früheren Ergebnisse den Satz aussprechen:

Eine primitive quaternäre Form läßt dann und nur dann eine Komposition zu, wenn ihre Determinante $D = d^2$ eine Quadratzahl und ihre Adjungierte durch d teilbar ist.

Ferner hat sich ergeben: *Durch Zusammensetzung zweier entgegengesetzten Formen entsteht stets eine Hauptform.*

Zu den Formen, die eine Komposition zulassen, gehören z. B. diejenigen quaternären Formen, die man erhält, wenn man die den binären

Formen entsprechenden *Hermite*schen Formen*) in reeller Gestalt darstellt, ferner solche, die in die Summe zweier binären Formen von gleicher Determinante transformiert werden können, dann auch die eigenartigen Formen, auf die *Hermite* in einer Arbeit über die Transformation *Abel*scher Funktionen gestoßen ist**).

Eine weitere Untersuchung, auf die wir nicht mehr eingehen, zeigt, daß alle aus zwei Formen zusammensetzbaren Formen äquivalent sind. Die Komposition der Formen ist also wesentlich eine Komposition der Klassen, ebenso wie bei binären Formen. Der obige letzte Satz kann dann auch so ausgesprochen werden: Durch Zusammensetzung zweier entgegengesetzten Klassen entsteht eine Hauptklasse. Diese Hauptklasse soll die zugehörige Hauptklasse heißen. Dann findet man durch Übergang zu den koordinierten bilinearen Substitutionen, daß durch Zusammensetzung einer Klasse mit der zugehörigen Hauptklasse die ursprüngliche Klasse entsteht. Ich hoffe, später zeigen zu können, daß zwei Klassen, die zu derselben Hauptklasse gehören und auch nur solche stets zusammengesetzt werden können. Die Eindeutigkeit in der Komposition der Klassen bleibt übrigens bestehen, wenn man die Definition der Komposition allgemeiner, als wir es oben getan haben, folgendermaßen faßt. Von drei Formen A, B, C, die auch verschiedene Determinanten haben dürfen, soll A aus B und C zusammengesetzt heißen, wenn A ganzzahlig in das Produkt $B \cdot C$ transformiert werden kann durch eine bilineare Substitution, deren beide antistrophen Determinanten positiv sind und keinen gemeinsamen Teiler haben. Aus dieser Definition ergeben sich ganz ähnliche Folgerungen, wie *Gauß* sie aus seiner Definition für binäre Formen gezogen hat (Disq. art. 235). Die 5. und 6. Folgerung können sogar wörtlich übernommen werden.

Wir bemerken noch, daß die Identität, die wir im 5. Abschnitt abgeleitet haben, auch auf die den quaternären Formen entsprechenden *Hermite*schen Formen ausgedehnt werden kann. Geht man dann von der komplexen zur reellen Darstellung über, so kann man zu Formen mit 8 Variabeln gelangen, die eine ganzzahlige Komposition zulassen.

*) *Ch. Hermite*, Sur la théorie des formes quadratiques, dieses Journal Bd. 47 oder Oeuvres I p. 238.

**) *Ch. Hermite*, Sur la transformation des fonctions abéliennes, Comptes rendus de l'académie des sciences t. XL, 1855, oder Oeuvres I, p. 450.

Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme.

Von Herrn *Ernst Steinitz* in Breslau.

Einleitung.

Cauchy hat zuerst bemerkt, daß die Konvergenz gewisser Reihen von der Anordnung ihrer Glieder abhängig ist, und hat damit diejenige Erscheinung entdeckt, die man heute als *bedingte Konvergenz* zu bezeichnen pflegt. *Dirichlet* zeigte, daß jede absolut konvergente Reihe unbedingt konvergiert und bei jeder Anordnung dieselbe Summe ergibt. Er erkannte ferner, daß bei gewissen nicht absolut konvergenten Reihen durch Umstellung der Glieder eine konvergente Reihe mit anderer Summe erzielt werden kann. Diese beiden Bemerkungen wurden durch die Untersuchungen *Riemann*s ergänzt, welcher erstens die völlige Äquivalenz von absoluter und unbedingter Konvergenz dartat und zweitens bewies, daß eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen zu einer konvergenten Reihe mit beliebig vorgeschriebener (reeller) Summe umgeordnet werden kann, oder, wie wir es ausdrücken wollen, daß der „Summenbereich“ einer solchen Reihe alle reellen Zahlen umfaßt.

Es liegt nahe, die Frage nach dem Summenbereich im komplexen Gebiete aufzuwerfen. Hier treten uns sofort zwei verschiedene Typen bedingt konvergenter Reihen entgegen. Bezeichnet g eine Gerade in der komplexen Zahlenebene, α einen Punkt auf g, $\omega \neq 0$ einen Punkt auf der durch den Nullpunkt gezogenen Parallelen, endlich

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

eine bedingt konvergente reelle Reihe, so folgt aus dem *Riemann*schen Satze sofort, daß die komplexe Reihe

$$\alpha + a_1 \omega + a_2 \omega + \cdots + a_n \omega + \cdots$$

jeden komplexen Wert von der Form $\alpha + r\omega$ haben kann, unter r jede reelle Zahl verstanden; d. h. *der Summenbereich der Reihe ist die Gerade g.* Ist ferner

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

irgendeine zweite reelle bedingt konvergente Reihe, so kann

$$b_1 i + b_2 i + \cdots + b_n i + \cdots$$

jeden rein imaginären Wert erhalten, und der Summenbereich der aus den Zahlen

$$a_1, b_1 i, a_2, b_2 i, \ldots a_n, b_n i, \ldots$$

gebildeten Reihe umfaßt *die ganze Ebene.*

Nun entsteht aber die Frage, ob mit den beiden hier durch Beispiele aufgewiesenen Typen alle Typen bedingt konvergenter komplexer Reihen erschöpft sind. Dies ist in der Tat der Fall, d. h. *der Summenbereich einer bedingt konvergenten komplexen Reihe ist entweder eine Gerade oder die ganze Ebene.* Bei Ausdehnung der Untersuchung auf komplexe Zahlen mit n Einheiten, die man in üblicher Weise als Punkte eines n-dimensionalen Raumes deutet, ergibt sich das analoge Resultat: *Der Summenbereich einer bedingt konvergenten Reihe ist stets eine lineare Mannigfaltigkeit.*

Zu diesem Ergebnis bin ich vor sieben Jahren gelangt und habe es damals Herrn *E. Landau* mitgeteilt, der mich bald darauf auf eine damals gerade erschienene Arbeit von *P. Lévy**) hinwies, in welcher derselbe Gegenstand behandelt ist. Nach einem flüchtigen Blick in diese Arbeit, welche einen dem meinigen verwandten, aber einfacheren Gedankengang verfolgt, glaubte ich von einer Publikation absehen zu sollen. In enger Beziehung zu meiner Behandlung des Reihenproblems steht aber mein Aufsatz: „Über diejenigen konvexen Polyeder mit n Grenzflächen, welche nicht durch $n - 4$ ebene Schnitte aus einem Tetraeder abgeleitet werden können**)," den ich ein Jahr darauf publizierte. Die Theorie der konvexen Punktmengen hat sich in neuerer Zeit überhaupt mehr und mehr als ein wichtiges Hilfsmittel für Untersuchungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik bewährt. Es erschien mir daher angebracht, ihre Grundlagen im Zusammenhange darzu-

---

*) Sur les séries semi-convergentes, Nouv. ann. d. Math. 64, 4. Sér. 5 (1905).

**) Arch. d. Math. und Phys., III. Reihe, XIV, p. 1 (1907).

stellen*). Dies soll hier geschehen. Wenn ich in Verbindung damit nun doch das Reihenproblem behandle, so geht die Anregung hierzu auf Herrn *Landau* zurück, der in neueren Lehrbüchern der Analysis bezüglich der komplexen Reihen geradezu falsche Angaben fand, sich auch bei der Durchsicht der *Lévy*schen Arbeit von ihrer Richtigkeit nicht überzeugen konnte. Das hat mich veranlaßt, diese Arbeit nochmals aufs genaueste durchzustudieren. Sie ist sehr knapp, ja sprunghaft gehalten und im Ausdruck oft unklar. Wer die Lösung nicht bereits kennt, wird stellenweise kaum erraten können, was gemeint ist. Kennt man die Lösung, so überzeugt man sich leicht, daß die Gesichtspunkte, in deren Auffindung die hauptsächlichen Schwierigkeiten der Aufgabe liegen, soweit sie sich auf die gewöhnlichen komplexen Zahlen bezieht, wirklich gefunden sind. Daß die Ausführungen im einzelnen richtig sind, wenn sie auch zur vollständigen Erledigung der Aufgabe nicht ausreichen, das zu konstatieren, ist aber auch dann noch recht mühsam. So sehr es zu mißbilligen ist, wenn Publikationen in so mangelhafter Form erfolgen, daß zu ihrem Verständnis noch ausführliche Kommentare notwendig sind, es muß zugegeben werden, daß Herr *Lévy* den angegebenen Satz für Reihen mit gewöhnlichen komplexen Zahlen in der zitierten Arbeit zum großen Teil bewiesen hat. Anders steht es mit dem Satze für die allgemeinen komplexen Zahlen, da hier nur Resultate angegeben werden. Damit soll nicht gesagt sein, daß Herr *Lévy* nicht auch für den allgemeinen Fall einen Beweis gefunden hat, noch weniger, daß er ihn nicht habe finden können. Aber man kann nicht sagen, daß dieser Beweis in seiner Arbeit enthalten ist, da hierzu ergänzende Untersuchungen im n-dimensionalen Raume notwendig werden, die nur im Falle $n = 2$ noch trivial sind. Um dies im einzelnen darzulegen, habe ich im Abschnitt V der vorliegenden Arbeit den allgemeinen Beweis im wesentlichen in der Form

---

*) In neuerer Zeit hat *C. Carathéodory* in der Arbeit „Über den Variabilitätsbereich der *Fourier*schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen", Rend. del Circ. mat. di Palermo XXXII (1911) eine kurze und übersichtliche Darstellung der grundlegenden Sätze über konvexe Punktmengen gegeben, so weit er ihrer für seine Zwecke bedarf. Ich möchte schon hier darauf hinweisen, daß ich den Begriff konvex etwas anders fasse als *Minkowski* und *Carathéodory*, indem ich ihn nicht auf abgeschlossene und ganz im Endlichen liegende Punktmengen beschränke. Dies ist für die Behandlung des Reihenproblems wesentlich.

gegeben, wie ich ihn ursprünglich fand, und dabei genau ausgeführt, welche für den Beweis wesentlichen Punkte sich auch bei Herrn *Lévy* finden und welche bei ihm fehlen. In Abschnitt IV ist ein auf ganz anderer Grundlage ruhender Beweis mitgeteilt, den ich erst vor einigen Jahren fand. Er hat den Vorzug, das Problem direkter anzugreifen, ist bei beliebigem n auch kürzer. Hier wird auch eine einfache geometrische Deutung für den Punkt, der die Summe einer unbedingt konvergenten Reihe, und allgemeiner für die lineare Mannigfaltigkeit, die den Summenbereich einer bedingt konvergenten Reihe darstellt, gegeben. Die Grundlagen der n-dimensionalen Geometrie, welche hier überall gebraucht werden, hätten als bekannt vorausgesetzt werden können. Ich habe es aber vorgezogen, sie nochmals abzuleiten. Dabei kommt natürlich alles auf die Form der Darstellung an. Ich glaube, daß die hier gewählte ihre Vorzüge besitzt und darum nicht überflüssig erscheinen wird.

I. Lineare Mannigfaltigkeiten.

§ 1. Wir betrachten nebeneinander zwei Zahlsysteme:

1) den Körper R der reellen Zahlen,

2) ein aus R abgeleitetes System $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}$ von komplexen Zahlen mit n Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$, d. h. ein System, für welches folgende Festsetzungen gelten:

Jedes Element aus P ist ein Ausdruck von der Form

$$\gamma = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + \cdots + c_n \varepsilon_n,$$

wo $c_1, c_2, \dots c_n$ beliebige reelle Zahlen sind. Sind

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n, \qquad \beta = b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_n \varepsilon_n$$

irgend zwei komplexe Zahlen, so soll nur dann $\alpha = \beta$ sein, wenn $a_1 = b_1, \dots a_n = b_n$ ist. Es ist ferner

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + \cdots + (a_n + b_n)\varepsilon_n, \qquad \alpha - \beta = (a_1 - b_1)\varepsilon_1 + \cdots + (a_n - b_n)\varepsilon_n$$

und, wenn c eine beliebige reelle Zahl bedeutet,

$$c\alpha = (ca_1)\varepsilon_1 + \cdots + (ca_n)\varepsilon_n$$

zu setzen.

In der Folge bezeichnen wir stets mit kleinen lateinischen Buchstaben reelle, mit kleinen griechischen Buchstaben komplexe Zahlen; große lateinische und griechische Buchstaben bezeichnen Systeme reeller bzw. komplexer Zahlen. Die beiden Zahlenarten werden als vollkommen ver-

schieden betrachtet; es soll also nicht R als Teilsystem von P angesehen werden. Doch bezeichnen wir mit 0 sowohl die reelle Zahl als auch die komplexe Zahl $c_1 \varepsilon_1 + \cdots + c_n \varepsilon_n$, deren sämtliche Koeffizienten c gleich 0 sind. Da wir die komplexen Zahlen auch als Punkte eines n-dimensionalen Raumes deuten, nennen wir die Koeffizienten c einer komplexen Zahl γ auch *Koordinaten von* γ. p komplexe Zahlen $\gamma_1, \ldots \gamma_p$ heißen *linear abhängig*, wenn eine lineare Relation $c_1 \gamma_1 + \cdots + c_p \gamma_p = 0$ existiert, in der nicht alle Koeffizienten c verschwinden; andernfalls heißen sie *linear unabhängig*. Besteht zwischen den komplexen Zahlen $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ eine Beziehung von der Form $\gamma = c_1 \gamma_1 + \cdots + c_p \gamma_p$, so heißt γ *komponierbar aus* $\gamma_1, \ldots \gamma_p$.

§ 2. Moduln. — Ein System M von komplexen Zahlen heiße ein *Modul*, wenn es den beiden Forderungen genügt:

a) Ist α ein Element aus M, c eine beliebige reelle Zahl, so gehört allemal auch $c\alpha$ zu M.

b) Sind α, β Elemente aus M, so gehört auch $\alpha + \beta$ zu M.

Aus dieser Definition erhellt sofort:

Jeder Modul enthält das Element 0, *und dieses bildet für sich einen Modul.*

Hat man ein System von endlich- oder unendlichvielen Moduln, so stellt die Gesamtheit der komplexen Zahlen, die allen diesen Moduln gemeinsam sind, wieder einen Modul dar. — Dieser soll als *Durchschnitt* der gegebenen Moduln bezeichnet werden.

Ist A ein beliebiges System komplexer Zahlen und Δ der Durchschnitt aller Moduln, welche A enthalten (und es gibt wenigstens einen solchen Modul, nämlich das System P aller komplexen Zahlen), so ist Δ ebenfalls ein A enthaltender Modul und kann demnach als der *kleinste* A *enthaltende Modul* bezeichnet werden. *Es gibt* also *zu jedem System* A *von komplexen Zahlen einen kleinsten* A *enthaltenden Modul* — er sei mit *Md.* A bezeichnet — *welcher in allen* A *enthaltenden Moduln enthalten ist.* Das System A wird auch eine *Basis von Md.* A genannt.

Ist A *ein endliches System, bestehend aus den Zahlen*

$$\alpha_1, \ldots \alpha_p,$$

so besteht Md. A *aus allen aus* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ *komponierbaren Zahlen.* Denn aus der Moduldefinition folgt sofort, daß jeder A enthaltende Modul auch

alle aus A komponierbaren Zahlen enthalten muß, und daß die Gesamtheit dieser Zahlen selbst einen Modul darstellt.

Bleiben wir dabei, daß A aus den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_p$ besteht, und nehmen wir an, daß in $\mathsf{M} = Md.\,\mathsf{A}$ r linear unabhängige Zahlen $\beta_1, \dots \beta_r$ vorkommen. Sei $k \geqq 0$ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen β, welche auch in A enthalten sind. Ist dann $k < r$, so sei etwa β_r nicht in A enthalten. Stellen wir jetzt β_r in der Form

$$\beta_r = c_1 \alpha_1 + \dots + c_p \alpha_p \tag{1.}$$

dar, und lassen wir auf der rechten Seite alle Glieder, die den Koeffizienten 0 haben, fort, so muß wenigstens ein α_i zurückbleiben, welches von $\beta_1, \dots \beta_r$ verschieden ist, da sonst zwischen den β eine lineare Relation bestände. Dann aber können wir die Gleichung (1.) nach α_i auflösen, und es folgt, wenn A′ das System bezeichnet, welches aus A dadurch hervorgeht, daß α_i durch β_r ersetzt wird, $Md.\,\mathsf{A}' = Md.\,\mathsf{A} = \mathsf{M}$. A′ ist eine Basis von M, welche wieder p Zahlen, und zwar $k+1$ von den Zahlen $\beta_1, \dots \beta_r$ enthält. Ist $k+1 < r$, so können wir dieselbe Schlußweise wiederholen. Somit ergibt sich schließlich:

Besitzt der Modul M *eine Basis von* p *Zahlen, und enthält er* r *linear unabhängige Zahlen* $\beta_1, \dots \beta_r$, *so besitzt er auch eine Basis von* p *Zahlen, unter denen die Zahlen* $\beta_1, \dots \beta_r$ *sämtlich vorkommen.*

Hieraus folgt weiter:

In einem Modul, der eine Basis von p *Zahlen besitzt, können nicht mehr als* p *linear unabhängige Zahlen vorkommen,* und — da das System P aller komplexen Zahlen die Basis $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ hat —

Es gibt nicht mehr als n *linear unabhängige komplexe Zahlen.*

Die Höchstzahl linear unabhängiger Elemente, die man einem Modul entnehmen kann, wird als *Rang* oder *Dimension des Moduls* bezeichnet. Hiernach hat P die Dimension n, während die Zahl 0 den einzigen Modul von der Dimension 0 darstellt.

Ist M ein Modul von der Dimension $r > 0$, so kann nach dem Vorangehenden eine Basis von M nicht weniger als r Elemente enthalten. Soll ein System A von r Zahlen eine Basis von M sein, so dürfen diese nicht linear abhängig sein; denn sonst könnte man eine von ihnen aus den andern komponieren und daher die Basis A durch Fortlassen dieser Zahl reduzieren. Besteht aber A aus r linear unabhängigen Zahlen

$\alpha_1, \dots \alpha_r$, und ist α ein beliebiges Element aus M, so besteht, da r die Dimension von M ist, eine Relation zwischen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_r$ in welcher der Koeffizient von α nicht verschwinden kann. α ist also aus $\alpha_1, \dots \alpha_r$ komponierbar, mithin *Md.* $\mathsf{A} = \mathsf{M}$. Somit ergibt sich:

Ist M *ein Modul von der Dimension* $r > 0$, *so bilden* r *Zahlen* $\alpha_1, \dots \alpha_r$ *aus* M *dann und nur dann eine Basis von* M, *wenn sie linear unabhängig sind.* Wir können, wie sofort zu sehen, hinzusetzen, *daß im letzteren Falle jede Zahl aus* M *nur auf eine Weise in der Form* $c_1 \alpha_1 \cdots + c_r \alpha_r$ *darstellbar ist.*

Weiter folgt: *Wenn von zwei Moduln* M *und* N *von gleicher Dimension* r *der eine* M *den andern* N *enthält, so sind sie identisch.* Denn eine Basis aus r Elementen von N ist nach dem vorhergehenden Satze zugleich eine Basis von M. — *Das System* P *aller komplexen Zahlen ist* daher *der einzige Modul von der Dimension* n. —

Sind A, B zwei beliebige Moduln, ist Δ ihr Durchschnitt, Γ der kleinste (der Durchschnitt) aller A und B enthaltenden Moduln, so besteht zwischen den Dimensionen a, b, c, d von A, B, Γ, Δ die Beziehung $a + b = c + d$. Denn wenn $\delta_1, \dots \delta_d$ eine Basis von Δ bilden, so kann man durch Hinzunahme von $a - d$ Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_{a-d}$ aus A, bzw. von $b - d$ Zahlen $\beta_1, \dots \beta_{b-d}$ aus B eine Basis von A bzw. B erhalten. Dann stellen die $a + b - d$ Zahlen $\delta_1, \dots \delta_d, \alpha_1, \dots \alpha_{a-d}, \beta_1, \dots \beta_{b-d}$, wie man leicht sieht, eine irreduzible Basis von Γ dar.

§ 3. Lineare Transformationen.

Definition. Sind $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n$, $\beta = b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_n \varepsilon_n$ irgend zwei komplexe Zahlen, so bezeichnen wir mit $\alpha\beta$ die reelle Zahl $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ *(Graßmanns inneres Produkt).*

Es gelten die Identitäten

$$(2.) \quad \alpha\beta = \beta\alpha, \quad c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta, \quad c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta, \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

$$(3.) \qquad \xi = (\varepsilon_1 \xi)\varepsilon_1 + \cdots + (\varepsilon_n \xi)\varepsilon_n.$$

Definition. Die komplexe Veränderliche $\eta = \varphi(\xi)$ heiße eine *lineare (homogene) Funktion der Veränderlichen* ξ, wenn $\varphi(\xi)$ für jedes ξ eindeutig definiert ist und die Gleichungen

$$\varphi(c\xi) = c\varphi(\xi), \qquad \varphi(\xi_1 + \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)$$

bei beliebigen c, ξ, ξ_1, ξ_2 bestehen.

Es seien $\alpha_1, \dots \alpha_n$ n feste linear unabhängige komplexe Zahlen,

so daß der Ausdruck $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ jeden komplexen Wert einmal annimmt, wenn die Koordinaten c die reellen Zahlen durchlaufen. Setzt man dann, unter $\beta_1, \ldots \beta_n$ beliebige feste komplexe Zahlen verstehend,

$$\xi = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,$$
$$\varphi(\xi) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n,$$

so folgt aus der Definition der linearen Funktionen unmittelbar, daß $\varphi(\xi)$ eine lineare Funktion von ξ ist, und zwar die einzige, welche an den Stellen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ die Werte $\beta_1, \ldots \beta_n$ annimmt. *Man kann* also *eine lineare Funktion $\varphi(\xi)$ bestimmen, indem man ihre Werte an n linear unabhängigen Stellen vorschreibt.* Damit $\varphi(\xi)$ jedes komplexen Wertes fähig ist — oder auch, damit $\varphi(\xi)$ nur für $\xi = 0$ verschwindet —, ist notwendig und hinreichend, daß die Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_n$ linear unabhängig sind. In diesem Falle wird auch umgekehrt ξ eine (eindeutige) lineare Funktion von $\varphi(\xi)$. Man spricht dann von einer *linearen (homogenen) Transformation φ*, durch welche jedem ξ ein $\eta = \varphi(\xi)$ eindeutig umkehrbar zugeordnet wird.

Ebenfalls als unmittelbare Folgerung aus der Definition der linearen Funktion $\varphi(\xi)$ ergibt sich: *Die Summe von linearen Funktionen ist eine lineare Funktion. Ist $\varphi(\xi)$ eine lineare Funktion von ξ, so auch $c \cdot \varphi(\xi)$. Eine lineare Funktion von einer linearen Funktion von ξ ist eine lineare Funktion von ξ. — $(\alpha\xi)\cdot\beta$, wo α, β beliebige Konstanten sind, stellt eine lineare Funktion von ξ dar. Durchläuft ξ einen r-dimensionalen Modul mit der Basis $\alpha_1, \ldots \alpha_r$, so durchläuft $\varphi(\xi)$ alle Zahlen des Moduls mit der Basis $\varphi(\alpha_1), \ldots \varphi(\alpha_r)$, also eines Moduls, dessen Dimension $\leqq r$ ist. Im Falle einer linearen Transformation müssen beide Moduln von gleicher Dimension sein.*

Es sei jetzt M ein beliebiger Modul, und es mögen die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ eine Basis von M bilden. Dann konstituieren die Zahlen ξ, welche den r Gleichungen

$$\alpha_1\xi = 0, \ \ldots \ \alpha_r\xi = 0$$

genügen, einen zweiten Modul N, und wenn α eine beliebige Zahl aus M ist, so wird auch die Gleichung $\alpha\xi = 0$ durch jede Zahl aus N befriedigt. Hieraus folgt, daß der Modul N durch den Modul M eindeutig bestimmt ist. Wir nennen N den *zu* M *komplementären Modul.* Besteht M nur aus der Zahl 0, so umfaßt N alle komplexen Zahlen; umfaßt M alle komplexen Zahlen, so besteht N, wie aus der Identität (3.) hervorgeht, nur aus der Zahl 0. Nehmen wir an, daß M die Dimension r habe, daß

$0 < r < n$ sei, und daß die Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_r$ eine Basis von M bilden, und wählen wir noch $n-r$ Zahlen $\alpha_{r+1}, \dots \alpha_n$ so, daß die Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ linear unabhängig sind. Dann ist jede komplexe Zahl γ aus $\alpha_1, \dots \alpha_n$ komponierbar, und da im Falle $\xi \neq 0$ $\gamma\xi$ nicht für jedes γ gleich 0 wird, so muß in diesem Falle auch wenigstens eine der Zahlen $\alpha_1\xi, \dots \alpha_n\xi$ von 0 verschieden sein. Setzt man also

$$\eta = \varphi(\xi) = (\alpha_1\xi)\varepsilon_1 + \cdots + (\alpha_n\xi)\varepsilon_n,$$

so ist η eine lineare Funktion von ξ, die nur für $\xi = 0$ verschwindet, somit jeden Wert genau einmal annimmt. Da nun die Gleichungen

$$\alpha_1\xi = 0, \dots \alpha_r\xi = 0$$

für die Zahlen ξ aus N und nur für diese bestehen, so beschreibt η, wenn ξ den Modul N durchläuft, den $(n-r)$-dimensionalen Modul mit der Basis $\varepsilon_{r+1}, \dots \varepsilon_n$. Daher ist auch N von der Dimension $n-r$. Der zu N komplementäre Modul M′ muß hiernach von der Dimension $n-(n-r)=r$, und, da er offenbar alle Elemente des r-dimensionalen Moduls M enthält, mit M identisch sein. *Die sämtlichen Moduln gruppieren sich also zu Paaren komplementärer Moduln. Von den beiden Moduln eines solchen Paares besteht jeder aus den Zahlen, die mit jeder Zahl des anderen Moduls multipliziert* 0 *ergeben. Die Summe der Dimensionen zweier komplementärer Moduln ist* n.

§ 4. Lineare Mannigfaltigkeiten.

Definition: Es sei δ eine komplexe Zahl, A ein System komplexer Zahlen. Dann bezeichnen wir mit $A+\delta$ bzw. $A-\delta$ das System aller Zahlen $\alpha+\delta$ bzw. $\alpha-\delta$, wo α jede Zahl aus A bedeutet. Die Systeme A und $A+\delta$ (oder $A-\delta$) heißen *parallel.* — Es ist hiernach klar, daß zwei Systeme, die zu einem dritten parallel sind, auch zueinander parallel sein müssen.

Definition. Ist M ein Modul, so heißen zwei Zahlen α, β *modulo* M *kongruent* — in Zeichen

$$\alpha \equiv \beta \text{ mod. M}$$

—, wenn die Differenz $\beta-\alpha$ dem Modul M angehört.

Es ergeben sich aus der Moduldefinition sofort die Sätze: *Aus* $\alpha \equiv \beta$ mod. M *folgt* $\beta \equiv \alpha$ mod. M *und* $c\alpha \equiv c\beta$ mod. M *für beliebiges* c. *Aus* $\alpha \equiv \beta$ mod. M, $\gamma \equiv \delta$ mod. M *folgt* $\alpha+\gamma \equiv \beta+\delta$ mod. M. *Jede Zahl ist sich selbst kongruent, und zwei Zahlen, die einer dritten* mod. M *kongruent sind, sind auch einander* mod. M *kongruent.*

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die komplexen Zahlen mod. M zu *Restklassen*, d. h. zu Systemen kongruenter Zahlen zusammenzufassen. Eine solche Klasse ist, wenn M gegeben ist, durch irgendeines ihrer Elemente bestimmt; sie fällt mit M zusammen, wenn sie die Zahl 0 enthält, und wird durch $\mathsf{M}+\alpha$ dargestellt, wenn sie die Zahl α enthält.

Definition: Unter einer *linearen Mannigfaltigkeit* ist ein System komplexer Zahlen zu verstehen, das einem Modul M parallel ist, oder — was nach dem Vorangehenden auf dasselbe hinauskommt — ein System komplexer Zahlen, die eine Restklasse eines Moduls M konstituieren.

Indem wir für „komplexe Zahl" auch „Punkt" sagen, können wir die letzten Sätze in geometrischer Form auch so aussprechen:

Zwei parallele lineare Mannigfaltigkeiten fallen zusammen, wenn sie einen Punkt gemein haben. Durch einen gegebenen Punkt läßt sich zu einer gegebenen linearen Mannigfaltigkeit genau eine parallele legen. Unter den zu einer linearen Mannigfaltigkeit parallelen Mannigfaltigkeiten befindet sich ein Modul, nämlich die durch den Punkt 0 *gehende Mannigfaltigkeit**).

Unter der *Dimension einer linearen Mannigfaltigkeit* ist die Dimension des zugehörigen parallelen Moduls zu verstehen. Hiernach gibt es lineare Mannigfaltigkeiten von $0, 1, 2, \ldots n$ Dimensionen. Die 0-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind die einzelnen Punkte, während die Gesamtheit P aller Punkte die einzige n-dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt. Als *Geraden* und *Ebenen* bezeichnen wir im folgenden die 1- und $(n-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten.

Wenn ein System von endlich- oder unendlichvielen linearen Mannigfaltigkeiten Λ *wenigstens einen gemeinsamen Punkt* α_0 *hat, so ist der Durchschnitt dieser Mannigfaltigkeiten wieder eine lineare Mannigfaltigkeit.* Denn wenn man jede Mannigfaltigkeit Λ des Systems durch den parallelen Modul $\Lambda - \alpha_0$ ersetzt, so haben die so erhaltenen Moduln als Durchschnitt einen Modul M, und $\mathsf{M}+\alpha_0$ ist alsdann der Durchschnitt des Systems linearer Mannigfaltigkeiten. — Bezeichnen wir, unter A eine beliebige Punktmenge (= Menge komplexer Zahlen) verstehend, mit *Ln.* A den Durchschnitt aller A enthaltenden linearen Mannigfaltigkeiten, also die

*) Wir verwenden die Bezeichnung parallel nur bei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimensionenzahl.

kleinste unter diesen Mannigfaltigkeiten, so gilt offenbar die Identität $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0) = Ln.\,\mathsf{A}-\alpha_0$ oder

$$Ln.\,\mathsf{A} = Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0)+\alpha_0.$$

Ist α_0 Element von A, so wird $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0)$ ein Modul und $\mathsf{A}-\alpha_0$ — oder auch das System, welches zurückbleibt, wenn wir aus $\mathsf{A}-\alpha_0$ die 0 fortlassen — eine Basis dieses Moduls. Besteht daher A aus den Punkten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$, so umfaßt $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0) = Md.(\mathsf{A}-\alpha_0)$ alle Punkte

$$c_1(\alpha_1-\alpha_0)+\cdots+c_r(\alpha_r-\alpha_0)$$

mit beliebigen Koeffizienten c, $Ln.\,\mathsf{A}$ alle Punkte

$$\alpha_0+c_1(\alpha_1-\alpha_0)+\cdots+c_r(\alpha_r-\alpha_0) = c_0\,\alpha_0+c_1\,\alpha_1+\cdots+c_r\,\alpha_r,$$

wo c_0 für $1-c_1-\cdots-c_r$ gesetzt ist. $Ln.\,\mathsf{A}$ hat wie $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0) = Md.(\mathsf{A}-\alpha_0)$ höchstens die Dimension r. *Die kleinste lineare Mannigfaltigkeit* Λ, *welche* $r+1$ *gegebene Punkte* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ *enthält (oder „verbindet"), besteht also aus allen Punkten*

$$c_0\,\alpha_0+c_1\,\alpha_1+\cdots+c_r\,\alpha_r,$$

wo die Koeffizienten c nur an die Bedingung

$$c_0+c_1+\cdots+c_r = 1$$

gebunden sind, und ist höchstens von der Dimension r. — Andererseits läßt sich jede r-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit Λ *als kleinste* $r+1$ *Punkte* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ *verbindende lineare Mannigfaltigkeit darstellen.* Es ist dazu, nachdem α_0 in Λ willkürlich angenommen ist, notwendig und hinreichend, $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ so zu wählen, daß die Differenzen $\alpha_1-\alpha_0, \ldots \alpha_r-\alpha_0$ dem Modul $\Lambda-\alpha_0$ angehören und linear unabhängig sind, also eine Basis dieses Moduls bilden. Ist dies der Fall, so wird durch $\alpha_0+c_1(\alpha_1-\alpha_0)+\cdots+c_r(\alpha_r-\alpha_0)$ jeder Punkt von Λ einmal dargestellt. Nun spricht sich die Bedingung der Unabhängigkeit von $\alpha_1-\alpha_0, \ldots \alpha_r-\alpha_0$ darin aus, daß die Gleichung $a_1(\alpha_1-\alpha_0)+\cdots+a_r(\alpha_r-\alpha_0) = 0$ nur für $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ besteht. Setzt man also $1-c_1-\cdots-c_r = c_0, -a_1-\cdots-a_r = a_0$, so daß

$$\alpha_0+c_1(\alpha_1-\alpha_0)+\cdots+c_r(\alpha_r-\alpha_0) = c_0\,\alpha_0+c_1\,\alpha_1+\cdots+c_r\,\alpha_r,$$
$$a_1(\alpha_1-\alpha_0)+\cdots+a_r(\alpha_r-\alpha_0) = a_0\,\alpha_0+a_1\,\alpha_1+\cdots+a_r\,\alpha_r$$

wird, so ergibt sich: $r+1$ *Punkte* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ *einer r-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit* Λ *bestimmen diese Mannigfaltigkeit dann und nur dann, wenn keine Relation* $a_0\,\alpha_0+\cdots+a_r\,\alpha_r = 0$ *besteht, in welcher die Summe der Koeffizienten a gleich* 0 *ist, ohne daß diese Koeffizienten sämtlich verschwinden.*

In diesem Falle wird jeder Punkt von Λ *genau einmal in der Form* $c_0 \alpha_0 + \cdots + c_r \alpha_r$ *dargestellt, wenn man die Koeffizienten c der Bedingung* $c_0 + \cdots + c_r = 1$ *unterwirft.*

Ist die Dimension r einer linearen Mannigfaltigkeit Λ kleiner als n, α_0 ein Punkt von Λ, M der zu Λ parallele Modul, N der zu M komplementäre Modul (dessen Dimension gleich $n - r$ ist), $\beta_1, \ldots \beta_{n-r}$ eine Basis von N, so besteht Λ aus allen Punkten ξ, für welche $\xi - \alpha_0$ zu M gehört, M aus allen Punkten $\xi - \alpha_0$, für welche

$$\beta_i(\xi - \alpha_0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots n-r)$$

wird. Setzen wir also $\beta_i \alpha_0 = c_i$ $(i = 1, \ldots n - r)$, so sehen wir, *daß sich die Punkte einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit* $(r < n)$ *als die simultanen Lösungen von* $n - r$ *Gleichungen*

$$\beta_i \xi = c_i \qquad (i = 1, \ldots n-r)$$

ergeben, wo $\beta_1, \ldots \beta_{n-r}$ *linear unabhängig sind.* Geometrisch gesprochen: *die r-dimensionale Mannigfaltigkeit stellt sich als Durchschnitt von* $n - r$ *Ebenen dar.* Geht man umgekehrt von $n - r$ Gleichungen

$$\beta_i \xi = c_i \qquad (i = 1, \ldots n-r) \tag{4.}$$

aus, wo $\beta_1, \ldots \beta_{n-r}$ linear unabhängig sind, also die Basis eines $(n - r)$-dimensionalen Moduls N darstellen, und wählt man, falls $r > 0$ ist, r Zahlen $\beta_{n-r+1}, \ldots \beta_n$ so, daß auch die n Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_n$ linear unabhängig sind, so durchläuft

$$\varphi(\xi) = (\beta_1 \xi)\,\varepsilon_1 + \cdots + (\beta_n \xi)\,\varepsilon_n$$

mit ξ alle komplexen Zahlen. Dies zeigt, daß die Gleichungen (4.) lösbar sind. Ist nun $\xi = \alpha_0$ eine Lösung, so kann man den Gleichungen wieder die Form

$$\beta_i(\xi - \alpha_0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots n-r)$$

geben und sieht hieraus, daß die Gesamtheit ihrer Lösungen die r-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit $\mathsf{M} + \alpha_0$ erfüllt, wo M den zu N komplementären Modul bezeichnet. Hält man die β_i fest, während man die c_i variiert, so bleibt M fest, während für α_0 jeder vorgeschriebene Wert eintreten kann (indem man $c_i = \beta_i \alpha_0$ nimmt), und man erhält also alle zu M parallelen Mannigfaltigkeiten und nur diese.

Es sei noch der folgende aus früheren Sätzen sich fast unmittelbar ergebende Satz erwähnt, der sich auch als Definition linearer Mannigfaltigkeiten eignet. *Eine Punktmenge* Λ *ist eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn*

sie die Forderung erfüllt: Sind α und β irgend zwei (gleiche oder verschiedene) Punkte aus Λ, a, b zwei reelle Zahlen, deren Summe 1 ist, so ist auch stets $a\alpha + b\beta$ in Λ enthalten.

§ 5. Einführung metrischer Begriffe. — Bei der Ableitung aller bisherigen Sätze ist die eine Voraussetzung, die wir in § 1 machten, daß nämlich R der Körper der reellen Zahlen sei, überflüssig. Man überzeugt sich leicht, daß alles Bisherige unverändert bestehen bleibt, wenn das zugrunde gelegte System R, dessen Elemente weiterhin mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet wurden, ein Körper ist in dem allgemeinen Sinne, wie dieser Begriff in neueren Arbeiten gebraucht wird*). Erst im folgenden werden spezielle Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen benutzt.

Ist α eine beliebige Zahl, so ist $\alpha\alpha$, wofür wir auch α^2 schreiben, $\geqq 0$ und nur dann $= 0$, wenn $\alpha = 0$ ist. Der absolute Wert von $\sqrt{\alpha^2}$ heißt *absoluter Wert von* α und wird mit $|\alpha|$ bezeichnet. Der absolute Wert einer Differenz $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ heißt *Abstand* oder *Entfernung der Punkte* α, β. — Es ist $|c\alpha| = |c| \cdot |\alpha|$.

Ist $\alpha \neq 0$, so ist $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ eine Zahl vom absoluten Werte 1. Von diesen Zahlen sagen wir, daß sie *Richtungen* repräsentieren. Die durch eine Zahl α vom absoluten Werte 1 repräsentierte Richtung wird *Richtung* α genannt. Die Richtungen α und $-\alpha$ heißen *entgegengesetzt*. Sind α und β zwei verschiedene Punkte, so heißt die Richtung $\frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|}$ *Richtung von α nach β*; sie ist der Richtung von β nach α entgegengesetzt. Ist Λ eine r-dimensionale Mannigfaltigkeit, $r > 0$, so heißen die Richtungen zwischen den Punkten von Λ die *Richtungen von* Λ. Ist M der zu Λ parallele Modul, so werden die Richtungen von Λ durch die in M enthaltenen Zahlen vom absoluten Werte 1 repräsentiert. Hieraus folgt sofort, daß sich parallele lineare Mannigfaltigkeiten als solche mit demselben Richtungssystem charakterisieren lassen, und daß in einer Geraden nur zwei entgegengesetzte Richtungen vorkommen.

Die durch den Punkt α gehende Gerade mit den Richtungen $\delta, -\delta$

---

*) S. insbesondere *H. Weber*, Math. Ann. 43, S. 521; *E. Steinitz*, dieses Journal 137, S. 167.

besteht aus allen Punkten $\alpha + c\delta$. Ein von α verschiedener Punkt der Geraden liegt von α aus in der Richtung δ oder $-\delta$, je nachdem c positiv oder negativ ist. Der Punkt α gibt so Anlaß die Gerade in zwei Punktmengen einzuteilen, die *Halbgeraden* oder *Strahlen* genannt werden sollen. Den Punkt α rechnen wir jedem dieser *Gegenstrahlen* zu und bezeichnen ihn als ihren *Ursprung. Ein Strahl ist durch seinen Ursprung und seine Richtung bestimmt.* — Wenn in einer Punktfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ die Richtung von jedem Punkte α_i zum nächsten α_{i+1} die nämliche δ ist, so ist, wie sich sofort ergibt, δ auch die Richtung von α_1 nach α_p. Unter drei verschiedenen Punkten α, β, γ einer Geraden ist deshalb stets einer dadurch ausgezeichnet, daß er zwischen den beiden andern, d. h. so liegt, daß die Richtungen von ihm nach den beiden andern Punkten entgegengesetzt sind. Man hat, wenn wieder $\delta, -\delta$ die Richtungen der Geraden sind, zwei Gleichungen

$$\alpha = \gamma + a\delta, \qquad \beta = \gamma + b\delta,$$

aus denen

$$\gamma = \frac{b}{b-a}\alpha + \frac{a}{a-b}\beta$$

folgt. Setzen wir $\frac{b}{b-a} = a'$, $\frac{a}{a-b} = b'$, so ist $\gamma = a'\alpha + b'\beta$, und $a' + b' = 1$. γ liegt zwischen α und β, wenn a und b verschiedenes Vorzeichen haben, wenn also $a' > 0$, $b' > 0$ ist. — Zu den zwischen α und β gelegenen Punkten wollen wir auch immer α und β selbst rechnen und, wenn $\alpha = \beta$ ist, den Punkt $\alpha = \beta$ als zwischen α und β gelegen ansehen. Dann gilt allgemein: *Zwischen α und β gelegen sind die Punkte γ von der Form $\gamma = a'\alpha + b'\beta$, wo $a' + b' = 1$, $a' \geqq 0$, $b' \geqq 0$ ist.*

Aus der Identität $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta$ folgt, falls α und β Richtungen sind

$$(\alpha \pm \beta)^2 = 2(1 \pm \alpha\beta);$$

und da $(\alpha \pm \beta)^2 \geqq 0$ und nur dann $= 0$ ist, wenn $\alpha \pm \beta = 0$ ist, so ergibt sich: *Für zwei Richtungen α, β ist $|\alpha\beta| \leqq 1$; die Gleichungen $\alpha\beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ finden nur im Falle $\alpha = \beta$ bzw. $\alpha = -\beta$ statt.* Der $\geqq 0$ und $\leqq \pi$ genommene Wert von $\arccos \alpha\beta$ heißt der *Winkel zwischen den Richtungen α und β* ($\sphericalangle(\alpha, \beta)$). Es ist also

$$\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\beta}{1} - \frac{1}{2}\frac{(\alpha\beta)^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{(\alpha\beta)^5}{5} - \cdots.$$

Sind α, β beliebig aber $\neq 0$, so sind $\frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{\beta}{|\beta|}$ Richtungen; mithin ist $\frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{\beta}{|\beta|} \leqq 1$, also

$$\alpha\beta \leqq |\alpha| \cdot |\beta|,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{\beta}{|\beta|}$ gilt. Ist eine der Zahlen α, β gleich 0, so wird $\alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta| = 0$. Die Ungleichung $\alpha\beta \leqq |\alpha| \cdot |\beta|$ (ebenso $|\alpha\beta| \leqq |\alpha| \cdot |\beta|$) gilt also ohne Einschränkung. Daraus folgt weiter

$$|\alpha + \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta} \leqq \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,|\alpha|\,|\beta|} = |\alpha| + |\beta|,$$

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn eine der Zahlen α, β gleich 0 ist, oder wenn die Richtungen $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ und $\frac{\beta}{|\beta|}$ gleich sind. — Für drei Punkte α, β, γ gilt daher

$$|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| \geqq |\alpha - \gamma|;$$

und hier gilt das Gleichheitszeichen nur wenn β zwischen α und γ liegt. Im Dreieck ist daher die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Ein System von Richtungen heiße *orthogonal*, wenn es entweder aus einer einzigen Richtung besteht, oder wenn je zwei Richtungen des Systems den Winkel $\frac{\pi}{2}$ einschließen. — Bilden $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ ein System orthogonaler Richtungen, so folgt aus $\alpha_i^2 = 1$, $\alpha_i \alpha_k = 0$ $(i \neq k)$, für beliebige Koeffizienten c die Gleichung

$$(c_1\,\alpha_1 + \cdots + c_r\,\alpha_r)^2 = c_1^2 + \cdots + c_r^2,$$

welche zeigt, *daß die Elemente eines Systems orthogonaler Richtungen linear unabhängig sind.* — Die Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ stellen ein System orthogonaler Richtungen dar.

Es sei M ein r-dimensionaler Modul, $r > 0$. Ist dann $\alpha \neq 0$ eine Zahl aus M, so gehört auch die Richtung $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ dem Modul M an. Ein orthogonales in M enthaltenes System von Richtungen kann nicht mehr als r Elemente enthalten, da es in M nicht mehr als r linear unabhängige Zahlen gibt. Hat man andererseits k orthogonale Richtungen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ in M, und ist $k < r$, so kann man in M eine nicht aus $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ komponierbare Zahl β angeben. Sind dann $c_1, \ldots c_k$ zunächst beliebig gewählt,

und wird $\beta' = \beta - (c_1 \alpha_1 + \cdots + c_k \alpha_k)$ gesetzt, so ist $\beta' \neq 0$ und $\alpha_{k+1} = \frac{\beta'}{|\beta'|}$ eine in M enthaltene Richtung. Nun wird aber

$$\alpha_{k+1} \cdot \alpha_i = \frac{\beta' \alpha_i}{|\beta'|} = \frac{\beta \alpha_i - c_i}{|\beta'|}. \qquad (i = 1, \ldots k)$$

Wählt man also $c_i = \beta \alpha_i$ $(i = 1, \ldots k)$, so wird $\alpha_{k+1} \alpha_i = 0$, und es ist $\alpha_1, \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1}$ ein in M enthaltenes System orthogonaler Richtungen. Hieraus folgt, *daß man in einem r-dimensionalen Modul* M *r orthogonale Richtungen finden kann*, und genauer, *daß, wenn man schon ein System von k solchen Richtungen hat, man dasselbe zu einem solchen von r Richtungen innerhalb* M *vervollständigen kann.* Dieses System $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ stellt dann eine Basis von M dar. Da der Modul aller Zahlen n-dimensional ist, so kann man im Falle $r < n$ noch $n - r$ (nicht in M vorkommende) Richtungen $\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n$ so hinzufügen, daß das System $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ orthogonal ist. $\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n$ bilden dann die Basis eines $(n-r)$-dimensionalen Moduls N und aus $\alpha_i \alpha_k = 0$ $(i \neq k)$ folgt, daß die Moduln M und N zueinander komplementär sind, daß also jede Richtung aus M zu jeder Richtung aus N orthogonal ist. Es umfaßt aber auch jeder der Moduln M, N alle Richtungen, die zu jeder Richtung des andern orthogonal sind. — Jede komplexe Zahl γ läßt sich auf genau eine Weise in der Form

$$\gamma = c_1 \alpha_1 + \cdots + c_n \alpha_n = (c_1 \alpha_1 + \cdots + c_r \alpha_r) + (c_{r+1} \alpha_{r+1} + \cdots + c_n \alpha_n),$$

also auf genau eine Weise in der Form $\gamma = \mu + \nu$ so darstellen, daß μ zu M, ν zu N gehört.

Es sei jetzt Λ eine zu M, Λ^* eine zu N parallele Mannigfaltigkeit, also etwa

$$\Lambda = \mathsf{M} + \alpha, \qquad \Lambda^* = \mathsf{N} + \beta.$$

Stellt man dann α und β in der Form

$$\alpha = \mu_1 + \nu_1, \qquad \beta = \mu_2 + \nu_2$$

so dar, daß μ_1, μ_2 zu M, ν_1, ν_2 zu N gehören, und setzt man

$$\mu_2 + \nu_1 = \gamma,$$

so ist $\mathsf{M} + \mu_1 = \mathsf{M} = \mathsf{M} + \mu_2$, $\mathsf{N} + \nu_2 = \mathsf{N} = \mathsf{N} + \nu_1$, daher

$$\Lambda = \mathsf{M} + \gamma, \qquad \Lambda^* = \mathsf{N} + \gamma$$

und mithin γ gemeinsamer Punkt von Λ und Λ^*. Ist ferner λ irgendein Punkt aus Λ, λ^* irgendein Punkt aus Λ^*, so gehört $\lambda - \gamma$ dem Modul M, $\lambda^* - \gamma$ dem komplementären Modul N an, und es wird das Quadrat des Abstandes der Punkte λ, λ^*

$$(\lambda^* - \lambda)^2 = [(\lambda^* - \gamma) - (\lambda - \gamma)]^2 = (\lambda^* - \gamma)^2 + (\lambda - \gamma)^2.$$

Im Falle $\lambda = \lambda^*$ muß also $\lambda = \lambda^* = \gamma$ sein, d. h. *γ ist der einzige gemeinsame Punkt von Λ und Λ^*.* Ferner zeigt unsere Gleichung, wenn man λ^* festhält und λ innerhalb Λ variieren läßt, daß γ dem Punkte λ^* näher ist als jeder andere Punkt von Λ. Ist λ^* von γ verschieden, so ist die Verbindungsgerade von λ^* und γ zugleich die einzige Gerade durch λ^*, welche Λ schneidet und zu Λ (d. h. zu allen Richtungen von Λ) senkrecht ist. Denn wenn ξ der Schnittpunkt einer solchen Geraden mit Λ ist, so muß $\xi - \lambda^*$ zu N, also ξ zu $\mathsf{N} + \lambda^* = \Lambda^*$ gehören, woraus $\xi = \gamma$ folgt. Somit ist gezeigt: *Ist Λ eine lineare Mannigfaltigkeit (ihre Dimension $r > 0$ und $< n$), so geht durch jeden Punkt λ^* außerhalb Λ genau eine Λ schneidende und zu Λ senkrechte Gerade. Ihr Schnittpunkt γ mit Λ ist der λ^* zunächst gelegene Punkt von Λ.* — Der Abstand $|\lambda^* - \gamma|$ heißt *Abstand des Punktes λ^* von der Mannigfaltigkeit Λ.*

Ist Λ, also auch der zu Λ parallele Modul M, eine Ebene, so wird der zu M komplementäre Modul N eine Gerade. Sind $\alpha, -\alpha$ die Richtungen dieser Geraden, so wird Λ von allen Punkten ξ erfüllt, die einer gewissen Gleichung von der Form

$$\alpha\xi = c$$

genügen. Jeder Punkt λ^* außerhalb Λ liegt auf einer bestimmten *Normalen* von Λ, d. h. auf einem Strahl (einer Halbgeraden), der zu Λ senkrecht ist und dessen Ursprung γ in Λ liegt. Die Richtung $\frac{\lambda^* - \gamma}{|\lambda^* - \gamma|}$ dieser Normalen ist α oder $-\alpha$, je nachdem $\alpha \cdot \frac{\lambda^* - \gamma}{|\lambda^* - \gamma|} = \frac{\alpha\lambda^* - c}{|\lambda^* - \gamma|}$ positiv oder negativ ist. (In jedem Falle ist $1 = \alpha^2 = \frac{|\alpha\lambda^* - c|}{|\lambda^* - \gamma|}$, also $|\alpha\lambda^* - c|$ der Abstand des Punktes λ^* von der Ebene Λ.) Der Ebene Λ entspricht also eine Einteilung der ganzen Punktmenge außerhalb Λ in zwei Gebiete, die *beiden Seiten von* Λ, welche den beiden zu Λ senkrechten Richtungen $\alpha, -\alpha$ zugeordnet sind. Die *„α-Seite“* wird von den Punkten λ^* erfüllt, für welche $\alpha\lambda^* > c$ ist.

II. Grenzwerte.

§ 6. Schranken einer Punktmenge.

Ist A eine Menge reeller Zahlen, so heißt m eine *obere (untere) Schranke* von A, wenn alle Zahlen aus $A \leqq m$ (bzw. $\geqq m$) sind. Eine

Zahlenmenge A, die eine obere (untere) Schranke besitzt, heißt *nach oben (unten) beschränkt.* Die Menge A ist *absolut beschränkt*, d. h. die absoluten Werte ihrer Elemente liegen unter einer festen Größe, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Ist A nach oben (unten) beschränkt, so gibt es unter allen oberen (unteren) Schranken eine kleinste (größte), die *obere (untere) Grenze* genannt wird.

Wir führen an dieser Stelle einige Bezeichnungen ein, die wir zum Teil erst späterhin verwenden. Es sei a eine reelle, α eine komplexe Zahl, B eine reelle, $\mathfrak{B}$ eine komplexe Zahlenmenge (Punktmenge), und es bedeute b jede Zahl aus B, β jede Zahl aus $\mathfrak{B}$. Dann verstehen wir unter aB bzw. $\alpha\mathfrak{B}$ bzw. $|\mathfrak{B}|$ das von den reellen Zahlen ab bzw. $\alpha\beta$ bzw. $|\beta|$, unter $a\mathfrak{B}$ bzw. $B\alpha$ das von den komplexen Zahlen $a\beta$ bzw. $b\alpha$ gebildete System.

Eine Ebene Λ mit den Normalenrichtungen $\alpha, -\alpha$, welche erfüllt wird von allen Punkten ξ, die der Gleichung $\alpha\xi = c$ genügen, soll eine *Schranke einer Punktmenge* $\mathfrak{Z}$ *in Richtung* α heißen, wenn kein Punkt von $\mathfrak{Z}$ auf der α-Seite von Λ liegt, wenn also c obere Schranke von $\alpha\mathfrak{Z}$ ist. Die Punktmenge $\mathfrak{Z}$ heiße *in Richtung* α *beschränkt*, wenn sie nach der Richtung α eine Schranke besitzt, wenn also die reelle Zahlenmenge $\alpha\mathfrak{Z}$ nach oben beschränkt ist. Ist dann g die obere Grenze von $\alpha\mathfrak{Z}$, so heißt die Ebene mit der Gleichung $\alpha\xi = g$ die *Grenz-* oder *Stützebene von* $\mathfrak{Z}$ *in Richtung* α. Sie gehört mit zu den Schranken in Richtung α und ist unter ihnen dadurch ausgezeichnet, daß sie entweder Punkte aus $\mathfrak{Z}$ enthält, oder daß doch diese Punkte ihr beliebig nahe kommen.

Aus den identisch geltenden Gleichungen und Ungleichungen

$$|(c\gamma)\zeta| = |c| \cdot |\gamma\zeta|, \qquad |(\gamma_1 + \gamma_2)\zeta| \leqq |\gamma_1\zeta| + |\gamma_2\zeta|$$

(und der Moduldefinition in Nr. 2) folgt, daß diejenigen komplexen Zahlen γ, für welche $\gamma\mathfrak{Z}$ absolut beschränkt ist, einen Modul bilden. — Von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der Reihen von komplexen Zahlen sind gewisse Punktmengen, die wir *symmetrisch ausgedehnt* nennen wollen. Die Punktmenge $\mathfrak{Z}$ soll symmetrisch ausgedehnt heißen, wenn sie sich jedem Paare entgegengesetzter Richtungen $\alpha, -\alpha$ gegenüber in der Beziehung gleichartig verhält, daß sie entweder nach beiden Richtungen beschränkt oder nach beiden unbeschränkt ist. — Es sei $\mathfrak{Z}$ eine symmetrisch ausgedehnte Punktmenge, $\gamma \neq 0$. Ist dann $\gamma\mathfrak{Z}$ nach oben beschränkt, so

ist Z in Richtung $\frac{\gamma}{|\gamma|}$, also auch in der entgegengesetzten Richtung beschränkt. Daher ist $-\gamma Z$ nach oben, mithin γZ nach unten beschränkt. γZ ist also absolut beschränkt. Da nun die komplexen Zahlen γ, für welche γZ absolut beschränkt ist, in jedem Falle einen Modul bilden, so können wir dasselbe hier für die Zahlen γ behaupten, für welche γZ nach oben beschränkt ist. Dieser Modul M enthält dann alle Richtungen und nur solche Richtungen, nach denen Z beschränkt ist.

Es kann natürlich auch sein, daß Z nach keiner Richtung beschränkt, oder, wie wir sagen wollen, *total unbeschränkt* ist. Dann reduziert sich der Modul M auf 0. — Ist die Dimension von M gleich r, so soll Z eine *symmetrisch ausgedehnte Punktmenge* $(n-r)$*-ter Klasse* (oder von der Klasse $n-r$) heißen. Die n-te Klasse umfaßt dann die total unbeschränkten Punktmengen, die 0-te Klasse diejenigen, welche nach allen Richtungen beschränkt sind. Die letzteren sind nichts anderes als die absolut beschränkten Punktmengen. Denn, wenn Z absolut beschränkt, m die obere Grenze von $|Z|$ ist, so folgt aus der allgemeinen Ungleichung (§ 5) $\alpha\zeta \leqq |\alpha||\zeta|$, wenn α eine Richtung, ζ eine Zahl aus Z darstellt, $\alpha\zeta \leqq |\zeta| \leqq m$, d. h. Z ist nach jeder Richtung beschränkt. Wird andererseits Z als nach jeder Richtung beschränkt vorausgesetzt, so ergibt sich, wenn wir diese Voraussetzung auf die Richtungen $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ und die entgegengesetzten anwenden, daß $|\varepsilon_1\zeta|, \dots |\varepsilon_n\zeta|$ unter einem festen Wert m bleiben, und aus der Identität

$$\zeta = (\varepsilon_1\zeta)\,\varepsilon_1 + \cdots + (\varepsilon_n\zeta)\,\varepsilon_n$$

folgt

$$|\zeta| \leqq |(\varepsilon_1\zeta)\,\varepsilon_1| + \cdots + |(\varepsilon_n\zeta)\,\varepsilon_n| = |\varepsilon_1\zeta| + \cdots + |\varepsilon_n\zeta| \leqq nm,$$

d. h. Z ist absolut beschränkt. — Jede lineare r-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wie man sofort sieht, eine symmetrisch ausgedehnte Punktmenge von der Klasse r; der oben mit M bezeichnete Modul, welcher die Richtungen umfaßt, nach denen Λ beschränkt ist, ist zu dem zu Λ parallelen Modul komplementär.

§ 7. Abgeschlossene Punktmengen.

Umgebung eines Punktes α heiße jede Menge aller Punkte, deren Abstand von α einen gegebenen positiven Wert m nicht überschreitet. — *Häufungsstelle* einer Punktmenge Z heißt ein (zu Z gehöriger oder nicht

gehöriger) Punkt α, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung von α wenigstens ein von α verschiedener Punkt aus Z liegt. — Eine Punktmenge Z heißt (nach *G. Cantor*) *abgeschlossen*, wenn sie keine Häufungsstellen oder nur solche besitzt, die selbst Punkte von Z sind.

Wir bemerken noch ausdrücklich: So wie wir hier weder unendlich große (reelle oder komplexe) Zahlen noch unendlich ferne Punkte einführen, so kennen wir auch keine unendlich fernen Häufungsstellen. Wir werden daher beispielsweise von der Menge aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sagen, daß sie keine Häufungsstelle besitzt, und sie demgemäß als abgeschlossen betrachten, wenn es auch bei anderen Untersuchungen zweckmäßig sein kann, die Definitionen so zu fassen, daß solche Mengen nicht als abgeschlossen gelten*).

Jede lineare Mannigfaltigkeit Λ ist eine abgeschlossene Punktmenge, da jeder Punkt außerhalb Λ einen kürzesten Abstand von Λ hat (§ 5), also nicht Häufungsstelle von Λ ist. Ist ferner ein Punkt α und eine positive Zahl m gegeben, so konstituieren sowohl die der Bedingung $|\xi - \alpha| \leqq m$, als auch die der Bedingung $|\xi - \alpha| \geqq m$ genügenden Punkte ξ eine abgeschlossene Punktmenge.

Wenn ein System von endlich- oder unendlichvielen abgeschlossenen Punktmengen Π wenigstens einen gemeinsamen Punkt hat, so ist der Durchschnitt Δ des Systems wieder eine abgeschlossene Punktmenge. Denn eine Häufungsstelle von Δ ist auch Häufungsstelle einer jeden der Mengen Π, also Punkt jeder dieser Mengen und somit Punkt von Δ. — Zu jeder Punktmenge Z gehört eine kleinste Z enthaltende abgeschlossene Punktmenge, nämlich der Durchschnitt aller Z enthaltenden abgeschlossenen Punktmengen. Wir kennzeichnen diese Punktmenge weiterhin durch einen beigefügten Strich. Z' muß alle Punkte von Z, ebenso alle Häufungsstellen von Z enthalten. Ist andererseits ein Punkt α weder Punkt noch Häufungsstelle von Z, so kann man $m > 0$ so wählen, daß für jeden Punkt ζ aus Z $|\zeta - \alpha| \geqq m$ wird. Die sämtlichen Punkte ξ, welche der Bedingung $|\xi - \alpha| \geqq m$ genügen, bilden dann eine abgeschlossene Punktmenge, welche Z, nicht aber den Punkt α, enthält. α kann daher nicht dem

*) Erst in Abschnitt VII, wo wir die Verhältnisse im projektiven Raum betrachten, werden die für diesen zweckmäßigen Definitionen eingeführt werden.

Durchnitt Z' aller Z enthaltenden abgeschlossenen Punktmengen angehören. Z' besteht also aus allen Punkten und Häufungsstellen von Z.

§ 8. Konvergenz.

Es liege eine komplexe Zahlenfolge

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_p, \dots$$

vor. — Aus $|\gamma(\xi_1+\xi_2)| \leqq |\gamma\xi_1|+|\gamma\xi_2|$ und $|\gamma(c\xi)| = |c|\cdot|\gamma\xi|$ folgt, daß diejenigen Zahlen, für welche die reelle Folge

$$\gamma_0\xi, \gamma_1\xi, \dots \gamma_p\xi, \dots$$

den Grenzwert 0 hat, einen Modul erfüllen. Wenn daher für n linear unabhängige Werte ξ $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi = 0$ ist, so besteht diese Gleichung für jedes ξ. In diesem Falle schreibt man $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = 0$. Die Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = 0$ besagt demnach, daß die n Koordinatenfolgen $\gamma_0\varepsilon_i, \gamma_1\varepsilon_i, \dots$ $(i = 1, \dots n)$ den Grenzwert 0 haben. Aus

$$(1.) \qquad |\gamma_p\varepsilon_i| \leqq |\gamma_p| \leqq |\gamma_p\varepsilon_1| + \dots + |\gamma_p\varepsilon_n| \qquad (i=1,\dots n;\ p=0,1,\dots)$$

folgt ferner, daß die Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = 0$ mit der Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} |\gamma_p| = 0$ äquivalent ist.

Die Angabe $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = \gamma$ wird als gleichbedeutend mit $\lim\limits_{p=\infty} (\gamma_p - \gamma) = 0$ erklärt. Sie ist auch gleichbedeutend mit der Angabe, daß die Koordinatenfolgen $\gamma_0\varepsilon_i, \gamma_1\varepsilon_i, \dots$ $(i = 1, \dots n)$ die Koordinaten von γ zu Grenzwerten haben, oder daß für jedes ξ $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi = \gamma\xi$ ist.

Liegen zwei komplexe Zahlenfolgen $\alpha_0, \alpha_1, \dots$; $\beta_0, \beta_1, \dots$ und eine reelle $c_0, c_1, \dots$ vor, welche Grenzwerte besitzen, so ergibt sich aus den bekannten Sätzen über reelle Zahlenfolgen ohne weiteres:

$$\lim_{p=\infty} (\alpha_p \pm \beta_p) = \lim_{p=\infty} \alpha_p \pm \lim_{p=\infty} \beta_p, \qquad \lim_{p=\infty} (c_p\,\alpha_p) = \lim_{p=\infty} c \cdot \lim_{p=\infty} \alpha_p,$$

$$\lim_{p=\infty} (\alpha_p\,\beta_p) = \lim_{p=\infty} \alpha_p \cdot \lim_{p=\infty} \beta_p$$

und für jede lineare Funktion $\varphi(\xi)$

$$\lim_{p=\infty} \varphi(\alpha_p) = \varphi(\lim_{p=\infty} \alpha_p).$$

Ist $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen, und besitzt die reelle Folge $\gamma_0\xi, \gamma_1\xi, \dots$ für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ Grenzwerte, so folgt aus $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p(\xi_1+\xi_2) = \lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi_1 + \lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi_2$ und $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p(c\xi_1) = c \lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi_1$: Diejenigen Zahlen ξ, für welche die Folge $\gamma_0\xi, \gamma_1\xi, \dots$ einen Grenzwert besitzt, er-

füllen einen Modul M. Ist r der Rang von M, so gibt es eine bestimmte $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Λ von der Beschaffenheit, daß für jede Zahl γ aus Λ und jede Zahl ξ aus M die Gleichung $\lim_{p=\infty} \gamma_p \xi = \gamma \xi$ besteht. Ist nämlich $r = 0$, so kann ξ nur den Wert 0 haben, und die Gleichung $\lim_{p=\infty} \gamma_p \xi = \gamma \xi$ besteht für jeden Wert von γ. Ist $r > 0$, $\alpha_1, \dots \alpha_r$ eine Basis von M, und wird $\lim_{p=\infty} \gamma_p \alpha_i = c_i$ $(i = 1, \dots r)$ gesetzt, so fordert die Gleichung $\lim_{p=\infty} \gamma_p \xi = \gamma \xi$, daß γ den r Gleichungen $\gamma \alpha_i = c_i (i = 1, \dots r)$ genügt. Durch diese Gleichungen wird aber eine $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Λ definiert. Ist andererseits γ irgendein Element dieser Mannigfaltigkeit, ξ eine Zahl aus M, so hat ξ die Form $\xi = a_1 \alpha_1 + \dots + a_r \alpha_r$, und es wird

$$\lim_{p=\infty} \gamma_p \xi = \lim_{p=\infty} a_1 \gamma_p \alpha_1 + \dots + \lim_{p=\infty} a_r \gamma_p \alpha_r = a_1 \lim_{p=\infty} (\gamma_p \alpha_1) + \dots + a_r \lim_{p=\infty} (\gamma_p \alpha_r)$$
$$= a_1 c_1 + \dots + a_r c_r = a_1 \gamma \alpha_1 + \dots + a_r \gamma \alpha_r = \gamma \xi .$$

Wird $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_p = \sigma_p$ gesetzt $(p = 0, 1, \dots)$, so heißt die Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_p + \dots$$

konvergent, wenn die Folge $\sigma_0, \sigma_1, \dots \sigma_p \dots$ einen Grenzwert σ besitzt; σ heißt die Summe der Reihe. Die Forderung der Konvergenz der komplexen Reihe ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die reelle Reihe $\gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \dots$ für jedes ξ konvergiert, oder daß die n Koordinatenreihen $\gamma_0 \varepsilon_i + \gamma_1 \varepsilon_i + \dots$ $(i = 1, \dots n)$ konvergieren sollen. Die Summen dieser Reihen sind dann die Koordinaten $\sigma \varepsilon_i$ der Summe σ der komplexen Reihe. — In jedem Falle bilden die Zahlen ξ, für welche die Reihe $\gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \dots$ konvergiert einen Modul M, und für jede Zahl ξ dieses Moduls ist $\gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \dots = \sigma \xi$, wo σ innerhalb einer bestimmten linearen Mannigfaltigkeit Λ beliebig wählbar ist, deren Dimension $n - r$ ist, wenn r die Dimension von M bezeichnet.

Damit die komplexe Reihe $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots$ unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß die n Koordinatenreihen unbedingt, also absolut konvergieren. Die Reihe hat dann bei jeder Anordnung ihrer Glieder auch dieselbe Summe. Aus den Ungleichungen (1.) folgt, daß als notwendige und hinreichende Bedingung für die unbedingte Konvergenz der Reihe auch die Konvergenz von $|\gamma_0| + |\gamma_1| + \dots$, also die absolute Konvergenz angegeben werden kann.

III. Konvexe Punktmengen.

§ 9. Eine Punktmenge Z soll *konvex* heißen, wenn sie die Forderung erfüllt: Sind α und β Punkte aus Z, so gehört auch jeder Punkt zwischen α und β der Menge Z an.

α und β sollen hierbei nicht notwendig verschieden sein. Wir betrachten demgemäß auch einen einzelnen Punkt als eine konvexe Punktmenge.

1. *Der Durchschnitt* Δ *eines Systems von endlich- oder unendlichvielen konvexen Punktmengen* Π (die wenigstens einen gemeinsamen Punkt besitzen) *ist eine konvexe Punktmenge.*

Denn, wenn α und β zu Δ gehören, so gehören sie auch zu jeder Menge Π. Daher ist auch jeder Punkt zwischen α und β Punkt einer jeden Menge Π, also Punkt von Δ. — Jede Punktmenge ist in einer konvexen Punktmenge, nämlich in dem System P aller Punkte enthalten. Aus 1. ergibt sich jetzt sofort:

2. *Zu jeder Punktmenge* Z *gibt es eine kleinste* Z *enthaltende konvexe Punktmenge, nämlich den Durchschnitt aller* Z *enthaltenden konvexen Punktmengen.*

Wir bezeichnen diese Punktmenge weiterhin durch einen übergesetzten Strich, im vorliegenden Falle also mit $\overline{\mathsf{Z}}$.

3. *Ist die Punktmenge* Z *konvex, so ist auch* Z' (die kleinste Z enthaltende abgeschlossene Punktmenge, § 7) *konvex.*

Es seien nämlich α und β Punkte aus Z', γ ein Punkt zwischen α und β. α und β sind Punkte oder Häufungsstellen von Z. Ist daher eine beliebig kleine positive Zahl d gegeben, so gibt es in Z zwei Punkte α_1, β_1 (die eventuell mit α, β zusammenfallen können), für welche

$$(1.) \qquad |\alpha_1 - \alpha| < d, \quad |\beta_1 - \beta| < d$$

wird. Da γ zwischen α und β liegt, hat man eine Gleichung

$$(2.) \qquad \gamma = c\alpha + (1-c)\beta. \qquad (0 \leqq c \leqq 1)$$

Wegen der Konvexität von Z gehört dann der zwischen α_1 und β_1 gelegene Punkt

$$(3.) \qquad \gamma_1 = c\alpha_1 + (1-c)\beta_1$$

zu Z. Aus (1.), (2.), (3.) folgt

$$|\gamma_1 - \gamma| = |c(\alpha_1 - \alpha) + (1-c)(\beta_1 - \beta)|$$
$$\leqq c|\alpha_1 - \alpha| + (1-c)|\beta_1 - \beta| \leqq cd + (1-c)d = d.$$

Dies zeigt, daß in jeder Umgebung von γ ein Punkt γ_1 von Z liegt, daß

also γ Punkt oder Häufungsstelle von Z, somit Punkt von Z' sein muß. Z' ist also konvex.

Es sei Z eine beliebige Punktmenge. Soll eine Z enthaltende Punktmenge Π konvex und abgeschlossen sein, so muß sie $\bar{\mathsf{Z}}$ und daher auch die kleinste $\bar{\mathsf{Z}}$ enthaltende abgeschlossene Punktmenge $(\bar{\mathsf{Z}})'$, die wir kurz mit $\bar{\mathsf{Z}}'$ bezeichnen, enthalten. Da aber nach 3. $\bar{\mathsf{Z}}'$ auch konvex ist, so folgt:

4. $\bar{\mathsf{Z}}' = (\bar{\mathsf{Z}})'$ *ist die kleinste von allen* (der Durchschnitt aller) Z *enthaltenden zugleich konvexen und abgeschlossenen Punktmengen.*

Die linearen Mannigfaltigkeiten sind Beispiele für konvexe, abgeschlossene Punktmengen. Bezeichnet ferner α eine Richtung, so ist das System A aller Punkte ξ, welche der Bedingung $\alpha\xi \leqq c$ genügen, also der „Halbraum", welcher alle Punkte ξ der Ebene $\alpha\xi = c$ und alle auf der $(-\alpha)$-Seite dieser Ebene gelegenen Punkte umfaßt, konvex und abgeschlossen. Sind nämlich ξ_1, ξ_2 Punkte aus A, und ist ξ ein Punkt zwischen ξ_1 und ξ_2, so hat man

$$\alpha\xi_1 \leqq c,\ \alpha\xi_2 \leqq c,\ \xi = a\xi_1 + (1-a)\xi_2, \qquad (0 \leqq a \leqq 1)$$

daher

$$\alpha\xi = a\alpha\xi_1 + (1-a)\alpha\xi_2 \leqq ac + (1-a)c = c.$$

ξ gehört also zu A, und A ist konvex. Ist ferner β ein nicht zu A gehöriger Punkt, $\alpha\beta = c_1$, so folgt $c_1 > c$ und für jeden Punkt ξ aus A

$$|\beta - \xi| = |\alpha||\beta - \xi| \geqq \alpha(\beta - \xi) = \alpha\beta - \alpha\xi \geqq c_1 - c.$$

Mithin ist β keine Häufungsstelle von A. A ist also abgeschlossen.

Es sei Z eine konvexe Punktmenge, die jedoch nicht alle Punkte des Raumes umfassen soll. Ist dann α ein nicht zu Z gehöriger Punkt, $a > 0$, $b > 0$, so liegt α zwischen $\alpha + a\varepsilon_1$ und $\alpha - b\varepsilon_1$, und es können daher diese Punkte nicht beide zugleich der Menge Z angehören. Man kann daher aus den beiden Zahlen $\varepsilon_1, -\varepsilon_1$ eine — wir nennen sie ε_1' — so auswählen, daß das System der Punkte $\alpha + c_1\varepsilon_1'$ $(c_1 > 0)$ keinen Punkt aus A enthält. — Es sei jetzt k eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$. Nehmen wir an, es sei möglich, aus jedem der k Paare $\varepsilon_1, -\varepsilon_1; \ldots; \varepsilon_k, -\varepsilon_k$ eine Zahl $\varepsilon_1', \ldots \varepsilon_k'$ so auszuwählen, daß die Menge Δ_k aller Punkte

$$\alpha + c_1\varepsilon_1' + \cdots + c_k\varepsilon_k' \qquad (c_1 > 0, \ldots c_k > 0)$$

keinen Punkt mit Z gemein hat — eine Voraussetzung, die, wie wir sahen,

für $k=1$ sicher erfüllt ist. Ist dann $k<n$, und betrachtet man zwei Punkte

$$\gamma = \alpha + c_1\varepsilon_1' + \cdots + c_k\varepsilon_k' + a\varepsilon_{k+1},$$
$$\delta = \alpha + d_1\varepsilon_1' + \cdots + d_k\varepsilon_k' - b\varepsilon_{k+1},$$

wo a, b und alle Koeffizienten c_i, d_i positiv sind, so gehört der zwischen γ und δ gelegene Punkt

$$\frac{b}{a+b}\gamma + \frac{a}{a+b}\delta = \alpha + \frac{bc_1+ad_1}{a+b}\varepsilon_1' + \cdots + \frac{bc_k+ad_k}{a+b}\varepsilon_k'$$

der Menge Δ_k, also nicht der Menge Z an, und es muß daher wenigstens einer der Punkte γ, δ außerhalb Z liegen. Man kann daher die Zahl ε_{k+1}' aus den beiden Zahlen $\varepsilon_{k+1}, -\varepsilon_{k+1}$ so auswählen, daß das System Δ_{k+1} aller Punkte

$$\alpha + c_1\varepsilon_1' + \cdots + c_{k+1}\varepsilon_{k+1}' \quad (c_1>0, \ldots c_{k+1}>0)$$

keinen Punkt aus Z enthält. Dieser Schluß von k auf $k+1$ zeigt uns, daß Systeme, welche den über Δ_k gemachten Voraussetzungen entsprechen, für jeden der Werte $k=1, \ldots n$ existieren. — Betrachten wir jetzt ein System Δ_n und irgendeinen festen Punkt

$$\omega = \alpha + c_1\varepsilon_1' + \cdots + c_n\varepsilon_n' \quad (c_1>0, \ldots c_n>0)$$

aus Δ_n. c_p sei der kleinste der Koeffizienten $c_1, \ldots c_n$. Da $\varepsilon_1', \ldots \varepsilon_n'$ linear unabhängig sind, hat man für jeden Punkt ζ aus Z eine Darstellung

$$\zeta = \alpha + a_1\varepsilon_1' + \cdots + a_n\varepsilon_n',$$

wobei nicht alle Koeffizienten a positiv sein können. Es sei etwa $a_i \leqq 0$. Dann folgt

$$|\zeta - \omega| \geqq c_i - a_i \geqq c_i \geqq c_p.$$

Diese Ungleichung zeigt, daß kein Punkt aus Δ_n Häufungsstelle von Z ist. Δ_n hat also auch mit Z′ keinen Punkt gemein. — Der Zweck dieser Ausführungen war lediglich der Nachweis des Satzes:

5. *Wenn eine konvexe Punktmenge* Z *nicht alle Punkte enthält, so enthält auch* Z′ *nicht alle Punkte.*

§ 10. Analytische Darstellung der kleinsten eine Punktmenge Z enthaltenden konvexen Punktmenge. — Es lasse sich die von 0 verschiedene Zahl γ aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten komponieren; es bestehe also eine Gleichung

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p. \quad (a_1>0, \ldots a_p>0) \tag{4.}$$

Wenn die Zahlen α nicht linear unabhängig sind, also einem Modul von weniger als p Dimensionen angehören, so hat man eine Relation

(5.) $$0 = b_1\alpha_1 + \cdots + b_p\alpha_p,$$

in der nicht alle Koeffizienten b verschwinden. Ist dann c' der größte unter den Werten $\frac{|b_1|}{a_1}, \ldots \frac{|b_p|}{a_p}$, und etwa $\frac{|b_i|}{a_i} = c'$, so werde $c = c'$ oder $c = -c'$ gesetzt, je nachdem b_i positiv oder negativ ist. Es ist dann

$$\left|\frac{b_k}{c}\right| = \frac{|b_k|}{c'} = a_k \frac{|b_k|}{a_k} \cdot \frac{1}{c'} \leqq a_k, \quad a_k - \frac{b_k}{c} \geqq 0, \qquad (k = 1, \ldots p)$$

$$a_i - \frac{b_i}{c} = a_i - \frac{|b_i|}{c'} = 0,$$

also in der aus (4.) und (5.) folgenden Relation

(6.) $$\gamma = \left(a_1 - \frac{b_1}{c}\right)\alpha_1 + \cdots + \left(a_p - \frac{b_p}{c}\right)\alpha_p$$

kein Koeffizient negativ, wenigstens einer gleich 0 und, da $\gamma \neq 0$ ist, wenigstens einer positiv. Läßt man aus (6.) die Glieder mit verschwindenden Koeffizienten fort, so hat man eine Darstellung von γ von derselben Art wie unter (4.), nur daß nicht mehr alle Zahlen α vorkommen. Da eine solche Reduktion möglich ist, so lange die zurückbleibenden Zahlen α linear abhängig sind, so folgt:

1. *Ist die von 0 verschiedene Zahl γ aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten komponierbar, so kann man aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ n oder weniger als n (falls diese Zahlen einem Modul von der Dimension r angehören, r oder weniger als r) solche auswählen, daß auch aus diesen γ mittels positiver Koffizienten komponierbar ist.*

Wenn die $p+1$ Punkte $\alpha_0, \ldots \alpha_p$ einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit Λ angehören, so gehören die Differenzen $\alpha_1 - \alpha_0, \ldots \alpha_p - \alpha_0$ dem zu Λ parallelen Modul an. Ist $p > r$, so sind die Differenzen linear abhängig, und man hat eine Relation

$$b_1(\alpha_1 - \alpha_0) + \cdots + b_p(\alpha_p - \alpha_0) = 0$$

oder

(7.) $$b_0\alpha_0 + \cdots + b_p\alpha_p = 0,$$

wo

(8.) $$b_0 + \cdots + b_p = 0$$

ist, ohne daß sämtliche Koeffizienten b verschwinden. Ist jetzt γ ($\gamma = 0$ nicht ausgeschlossen) in der Form

(9.) $$\gamma = a_0\alpha_0 + \cdots + a_p\alpha_p$$

so darstellbar, daß die Koeffizienten a positiv sind und ihre Summe

(10.) $$a_0 + \cdots + a_p = 1$$

ist, so folgt

$$(11.) \qquad \gamma = \left(a_0 - \frac{b_0}{c}\right)\alpha_0 + \cdots + \left(a_p - \frac{b_p}{c}\right)\alpha_p$$

für beliebiges $c \neq 0$, und es ist zufolge (8.), (10.) die Summe der Koeffizienten auf der rechten Seite von (11.) gleich 1. Wählt man wieder c so, daß $|c|$ gleich der größten unter den Zahlen $\frac{|b_0|}{a_0}, \ldots \frac{|b_p|}{a_p}$ ist und das Vorzeichen von c mit dem Vorzeichen einer der Zahlen b_i übereinstimmt, für welche $\frac{|b_i|}{a_i} = |c|$ ist, so ist in (11.) kein Koeffizient negativ, aber wenigstens einer 0 und wenigstens einer positiv. Indem man in (11.) die Glieder mit verschwindenden Koeffizienten fortläßt und, falls noch mehr als $r+1$ zurückbleiben, das Verfahren wiederholt, erhält man den Satz:

2. *Läßt sich γ aus $\alpha_0, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten, deren Summe* 1 *ist, komponieren, so kann man aus den Punkten α $n+1$ oder weniger als $n+1$ (falls die Punkte α einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit angehören, $r+1$ oder weniger als $r+1$) solche auswählen, daß sich schon aus diesen γ mittels positiver Koeffizienten, deren Summe* 1 *ist, komponieren läßt.*

3. *Die kleinste die Punkte $\alpha_0, \ldots \alpha_p$ enthaltende konvexe Punktmenge besteht aus allen Punkten γ von der Form*

$$(12.) \quad \gamma = a_0\alpha_0 + \cdots + a_p\alpha_p \quad (a_0 \geqq 0, \ldots a_p \geqq 0;\ a_0 + \cdots + a_p = 1).$$

Beweis. Bezeichnen wir mit A das System der $p+1$ Punkte $\alpha_0, \ldots \alpha_p$, mit B das System aller Punkte γ von der Form (12.), so handelt es sich um den Beweis der Gleichung $\bar{\mathsf{A}} = \mathsf{B}$. — Es seien zunächst

$$\gamma = a_0\alpha_0 + \cdots + a_p\alpha_p \quad (a_0 \geqq 0, \ldots a_p \geqq 0;\ a_0 + \cdots + a_p = 1),$$
$$\gamma' = a_0'\alpha_0 + \cdots + a_p'\alpha_p \quad (a_0' \geqq 0, \ldots a_p' \geqq 0;\ a_0' + \cdots + a_p' = 1)$$

irgend zwei Punkte aus B, δ ein Punkt zwischen γ und γ'. Dann hat man

$$\delta = c\gamma + c'\gamma' \quad (c \geqq 0, c' \geqq 0;\ c + c' = 1)$$

oder, wenn man $ca_i + c'a_i' = d_i$ $(i = 0, \ldots p)$ setzt,

$$\delta = d_0\alpha_0 + \cdots + d_p\alpha_p \quad (d_0 \geqq 0, \ldots d_p \geqq 0;\ d_0 + \cdots + d_p = 1);$$

δ ist also ein Punkt von B, und somit B eine konvexe Punktmenge. Indem man in (12.) einen Koeffizienten gleich 1, die übrigen gleich 0 nimmt, sieht man, daß B das System A, also auch $\bar{\mathsf{A}}$ enthält. — Wenn man andererseits irgendein Element γ aus B in der Form (12.) darstellt und die Glieder mit verschwindenden Koeffizienten fortläßt, so hat man eine Gleichung

$$\gamma = b_0\beta_0 + \cdots + b_k\beta_k \quad (b_0 > 0, \ldots b_k > 0,\ b_0 + \cdots + b_k = 1),$$

wo die Punkte β sämtlich in A, also auch in $\bar{\mathsf{A}}$ enthalten sind. Setzt man

$$b_0 + \cdots + b_i = s_i,$$
$$\frac{b_0\beta_0 + \cdots + b_i\beta_i}{b_0 + \cdots + b_i} = \gamma_i, \qquad (i = 0, \ldots k)$$

so ist für $i = 0, \ldots k-1$, $0 < s_i < 1$, $s_k = 1$, $\gamma_0 = \beta_0$, $\gamma_k = \gamma$:

$$\gamma_{i+1} = \frac{s_i}{s_{i+1}}\gamma_i + \frac{b_{i+1}}{s_{i+1}}\beta_{i+1}, \qquad (i = 0, \ldots k-1)$$

also γ_{i+1} zwischen γ_i und β_{i+1} gelegen. Man schließt hieraus sukzessive, daß die Punkte $\gamma_1, \ldots \gamma_k = \gamma$ zu $\bar{\mathsf{A}}$ gehören müssen. Also ist jeder Punkt γ aus B auch in $\bar{\mathsf{A}}$ enthalten, und es folgt $\mathsf{B} = \bar{\mathsf{A}}$.

Eine konvexe Punktmenge Z heiße *r-dimensional*, wenn die kleinste lineare Mannigfaltigkeit *Ln.* Z, in welcher Z enthalten ist, die Dimension r hat.

Es sei jetzt Z eine beliebige endliche oder unendliche Punktmenge, r die Dimension von $\bar{\mathsf{Z}}$, und es werde mit A jedes Teilsystem von Z bezeichnet, das nicht mehr als $r+1$ Punkte enthält. Γ sei das System aller derjenigen Punkte, welche wenigstens in einer der zu den Systemen A gehörigen kleinsten konvexen Punktmengen $\bar{\mathsf{A}}$ vorkommen. Dann ist Z in Γ, Γ in $\bar{\mathsf{Z}}$ enthalten. — Sind γ_1, γ_2 zwei Punkte aus Γ, so gibt es unter den Systemen A zwei solche $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$, daß γ_1 in $\bar{\mathsf{A}}_1$, γ_2 in $\bar{\mathsf{A}}_2$ vorkommt. Das System B aller der Punkte, die zu A_1 oder A_2 gehören, umfaßt endlichviele, nämlich höchstens $2r+2$ Punkte. Das konvexe System $\bar{\mathsf{B}}$ enthält γ_1 und γ_2, also auch jeden zwischen γ_1 und γ_2 gelegenen Punkt γ. Jeder solche Punkt γ ist, wie die Anwendung der Sätze 3. und 2. ergibt, aus $r+1$ oder weniger als $r+1$ Punkten des Systems B mittels positiver Koeffizienten komponierbar, deren Summe 1 ist. Da B Teilsystem von Z ist, jedes aus $r+1$ oder weniger Punkten von B bestehende System also ein System A repräsentiert, so ist γ Punkt eines Systems $\bar{\mathsf{A}}$ und gehört also zu Γ. Daraus folgt, daß Γ konvex ist; und da Z in Γ enthalten ist, muß auch $\bar{\mathsf{Z}}$ in Γ enthalten sein. Daraus folgt $\Gamma = \bar{\mathsf{Z}}$, und wir erhalten den Satz:

4. *Ist* Z *eine beliebige endliche oder unendliche Punktmenge,* r *die Dimension von* $\bar{\mathsf{Z}}$, *so läßt sich zu jedem Punkte* ζ *aus* $\bar{\mathsf{Z}}$ *eine aus nicht mehr als* $r+1$ *Punkten (in jedem Falle also eine aus nicht mehr als* $n+1$ *Punkten) bestehende Teilmenge* A *von* Z *so bestimmen, daß* ζ *in* $\bar{\mathsf{A}}$ *enthalten ist.*

§ 11. Die kleinste, eine Punktmenge Z enthaltende konvexe und abgeschlossene Punktmenge $\overline{Z}'$.

Im folgenden machen wir von einem aus den Elementen der Theorie der reellen Funktionen von n reellen Veränderlichen bekannten Satz Anwendung: *Ist Z eine abgeschlossene Punktmenge, γ ein nicht zu Z gehöriger Punkt, so gibt es wenigstens einen Punkt ζ in Z, für welchen der Abstand $|\zeta-\gamma|$ ein Minimum wird.* — Ist Z überdies konvex, so können wir hinzufügen, daß es *nur einen* solchen Punkt geben kann. Denn wenn für zwei verschiedene Punkte ζ_1, ζ_2 aus Z $|\zeta_1-\gamma|=|\zeta_2-\gamma|=d$ wird, so können ζ_1 und ζ_2 von γ aus nicht in derselben Richtung liegen, und es wird

$$d=\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=\left|\frac{\zeta_1-\gamma}{2}\right|+\left|\frac{\zeta_2-\gamma}{2}\right|>\left|\frac{\zeta_1-\gamma}{2}+\frac{\zeta_2-\gamma}{2}\right|=\left|\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}-\gamma\right|;$$

d. h. der zwischen ζ_1 und ζ_2 gelegene und darum zu Z gehörige Punkt $\frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_2)$ liegt näher zu γ als die Punkte ζ_1, ζ_2.

Es sei Z eine konvexe, abgeschlossene, aber nicht alle Punkte umfassende Menge, γ ein nicht zu Z gehöriger Punkt, β der γ am nächsten gelegene Punkt von Z, d der Abstand der Punkte β und γ, α die Richtung von β nach γ, und es werde $\alpha\beta=c$ gesetzt. Dann ist

$$\gamma=\beta+d\alpha,\ \alpha\beta=c,\ \alpha\gamma=c+d,\ d>0. \tag{13.}$$

Die Punkte ξ, welche der Ungleichung

$$\alpha\xi\leqq c \tag{14.}$$

genügen, erfüllen einen Halbraum, welcher die Ebene Λ mit der Gleichung $\alpha\xi=c$ und alle auf der $(-\alpha)$-Seite dieser Ebene gelegenen Punkte umfaßt. Der Punkt β liegt in Λ, der Punkt γ auf der α-Seite von Λ. Ist ζ ein beliebiger Punkt aus Z, p eine beliebige positive Zahl <1, so gehört auch der zwischen β und ζ gelegene Punkt η

$$\eta=p\zeta+(1-p)\beta=\beta-p(\beta-\zeta) \tag{15.}$$

zu Z, und man erhält aus (13.) und (15.) wegen der Minimumseigenschaft der Zahl d

$$\begin{aligned}d^2\leqq(\gamma-\eta)^2&=(d\alpha+p(\beta-\zeta))^2=d^2+p(2d\alpha(\beta-\zeta)+p(\beta-\zeta)^2)\\&=d^2+p(2d(c-\alpha\zeta)+p(\beta-\zeta)^2),\end{aligned}$$

also

$$2d(c-\alpha\zeta)+p(\beta-\zeta)^2\geqq 0.$$

Dies ist aber, da die positive Zahl p beliebig klein angenommen werden kann, nur möglich, wenn $c-\alpha\zeta\geqq 0$, also $\xi=\zeta$ der Ungleichung (14.)

genügt. Damit ist gezeigt, daß die Punktmenge Z ganz dem durch (14.) definierten Halbraum angehört, und daß ∧ Stützebene von Z in Richtung α ist. Da γ dem genannten Halbraum nicht angehört, haben wir den Satz:

1. *Ist Z eine konvexe abgeschlossene Punktmenge, γ ein nicht zu Z gehöriger Punkt, so gibt es einen Halbraum, welcher die Punktmenge Z, aber nicht den Punkt γ enthält.*

Es bezeichne jetzt Z eine beliebige Punktmenge. Ist Z, also auch $\bar{Z}'$, total unbeschränkt und somit in keinem Halbraum enthalten, so muß nach Satz 1. $\bar{Z}'$ alle Punkte des Raumes umfassen. Nach § 9, Satz 5., gilt dann dasselbe schon für $\bar{Z}$. — Ist aber Z nicht total unbeschränkt, so gibt es Z enthaltende Halbräume. Jeder solche Halbraum muß, da er konvex und abgeschlossen ist, auch $\bar{Z}'$ enthalten. Ist andererseits ξ ein allen diesen Halbräumen gemeinsamer Punkt, so muß ξ auch zu $\bar{Z}'$ gehören, weil es sonst nach Satz 1. einen $\bar{Z}'$ enthaltenden Halbraum gäbe, der ξ nicht enthielte. Somit ergeben sich die beiden Sätze:

2. *Ist Z eine total unbeschränkte Punktmenge, so umfaßt $\bar{Z}'$, also auch $\bar{Z}$ alle Punkte des Raumes*

und

3. *Ist die Punktmenge Z nicht total unbeschränkt, so ist $\bar{Z}'$ der Durchschnitt aller Z enthaltenden Halbräume.*

Anmerkung: Betrachten wir Schranken und Stützebenen als „orientierte“ Ebenen, deren Normale einen bestimmten Richtungssinn erhalten hat, so können wir dem letzten Resultat die folgende Fassung geben: *$\bar{Z}'$ ist die größte Punktmenge, welche dieselben Schranken (oder Stützebenen) besitzt wie Z.*

IV. Konvergente Reihen.

§ 12. Vorbemerkungen. — Wenn man bei einer unendlichen Folge reeller oder komplexer Zahlen von der Anordnung der Elemente abstrahiert, so bleibt eine abzählbare Zahlenmenge übrig, die sich noch auf unendlichviele andere Arten zu einer Zahlenfolge anordnen läßt. Dabei ist natürlich nicht außer acht zu lassen, daß die abzählbare Menge, von welcher hier die Rede ist, noch nicht bestimmt ist, wenn von jeder Zahl feststeht, ob sie in der Menge vertreten ist oder nicht; vielmehr muß auch feststehen, wie oft dies der Fall ist. Bei den Untersuchungen über Zahlen-

folgen hat man zu unterscheiden zwischen solchen Eigenschaften, welche durch die Anordnung der Elemente bedingt sind, und solchen, die von der Anordnung unabhängig sind, also der abzählbaren Menge an sich anhaften. Bei den Eigenschaften der zweiten Kategorie kann man die Forderung stellen, sie von vornherein in einer solchen Form einzuführen bzw. nachzuweisen, daß die Unabhängigkeit von der Anordnung unmittelbar zutage tritt.

Bei der Erklärung des Grenzwertes einer Zahlenfolge wird zumeist auf die Anordnung Bezug genommen. Indessen, daß die Folge einen Grenzwert besitzt, besagt nichts anderes, als daß eine Zahl, eben dieser Grenzwert, existiert, von dem sich höchstens endlichviele Glieder der Folge (absolut) um mehr als eine gegebene positive Größe p unterscheiden, wie klein auch p angenommen werde; und es ist hiernach klar, daß es sich hier um eine Eigenschaft der Folge handelt, die jeder Umordnung gegenüber invariant ist. Die Bezeichnungen *fundamental* für Zahlenfolgen mit Grenzwert und *elementar* speziell für Zahlenfolgen mit dem Grenzwert 0, welche *Heine* gebraucht, können wir demgemäß auf die abzählbaren Systeme übertragen, welche von den Gliedern der Folge konstituiert werden.

Bei der allgemeinen Definition der Konvergenz (bzw. Summe) einer unendlichen Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots \tag{1.}$$

ist die Bezugnahme auf die Anordnung der Glieder nicht zu vermeiden, wie sich nachträglich aus dem Beweise des Vorkommens bedingter Konvergenz ergibt. Wird mit Γ das System der Glieder der Reihe (1.), mit Σ das System der Zahlen

$$\sigma_p = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p \qquad (p=0, 1, \ldots)$$

bezeichnet, so ist für die Frage, ob die Reihe (1.) konvergiert, ob also die Folge

$$\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_p, \ldots$$

einen Grenzwert besitzt, das System Σ an sich entscheidend, d. h. die Reihenfolge seiner Elemente ohne Bedeutung, doch das System Σ selbst ist durch die Anordnung der Elemente von Γ bedingt. Zu einem von dieser Anordnung unabhängigen System werden wir aber geführt, wenn wir gleichzeitig die Elemente aller der verschiedenen Systeme Σ betrachten, die den verschiedenen Anordnungen von Γ zu einer unendlichen Reihe entsprechen. Alle diese Elemente haben das gemein, daß sie Summen

von endlichvielen Elementen aus Γ darstellen. Eine solche Summe, also die Summe eines jeden endlichen Teilsystems von Γ nennen wir eine *Partialsumme* von Γ, und wir bezeichnen mit Γ_* das System aller Partialsummen von Γ. Dabei rechnen wir zu den endlichen Teilsystemen auch das leere System und dementsprechend zu den Partialsummen auch stets die Zahl 0. Auch für den Fall, daß Γ selbst ein endliches System ist, werden wir diese Bezeichnungen verwenden; ist in diesem Falle k die Anzahl der Elemente von Γ, so besteht Γ_* aus 2^k Elementen, die natürlich numerisch nicht verschieden zu sein brauchen.

Das System Γ_* der Partialsummen eines abzählbaren Systems Γ spielt in den folgenden Untersuchungen, die sich auf die Gesamtheit aller Reihen, zu denen sich das System Γ anordnen läßt, beziehen, eine wesentliche Rolle. Die wichtigsten hier auftretenden Begriffe sind die (unbedingte und bedingte) *Summierbarkeit* und der *Summenbereich*. Wir nennen eine abzählbare Zahlenmenge *summierbar*, wenn wenigstens eine der Reihen, zu denen sie sich anordnen läßt, konvergiert. Wir nennen eine summierbare Zahlenmenge *unbedingt* oder *bedingt summierbar*, je nachdem alle oder nicht alle aus ihr gebildeten Reihen konvergieren. Wir nennen *Summenbereich* einer summierbaren Zahlenmenge die Gesamtheit aller derjenigen Zahlen, die sich als Summe einer aus den (sämtlichen) Zahlen der gegebenen Menge gebildeten Reihe darstellen lassen.

§ 13. Unbedingte Summierbarkeit.

Ist C ein abzählbares System reeller, nicht negativer Zahlen,

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_p + \cdots \tag{2.}$$

eine aus allen Elementen von C gebildete Reihe, und wird

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_p = s_p \tag{3.}$$

gesetzt, so stellen die Summen s_p Elemente des Systems C_* der Partialsummen dar. Hat man ferner irgendeine Partialsumme t, so haben die in dieselbe eingehenden Elemente aus C innerhalb der Reihe (2.) bestimmte Indizes, von denen, da es sich um eine endliche Anzahl handelt, einer der größte ist. Ist k dieser größte Index, so enthält s_k alle Summanden aus t, und es wird $s_k \geqq t$. Daraus folgt, daß das System C_* aller Partialsummen und das System der Partialsummen s_p entweder beide nach oben unbeschränkt sind oder beide dieselbe obere Grenze haben. Im ersten Fall

kann kein $\lim\limits_{p=\infty} s_p$ existieren, während im zweiten $\lim\limits_{p=\infty} s_p$ existiert und gleich dieser oberen Grenze ist. Das besagt, da die Anordnung der Elemente der Reihe (2.) willkürlich war:

Ein abzählbares System C reeller, nicht negativer Zahlen ist entweder überhaupt nicht summierbar oder unbedingt summierbar, je nachdem das System C_* der Partialsummen (nach oben) unbeschränkt oder beschränkt ist. Im zweiten Fall ist der Summenbereich von C eine einzige Zahl, nämlich die obere Grenze von C_*.

Ist C ein abzählbares System reeller Zahlen und C_* nicht absolut beschränkt, so müssen entweder die positiven oder die negativen Zahlen aus C ein System bilden, dessen Partialsummen nach oben bzw. unten nicht beschränkt sind. Man zeigt dann in bekannter Weise, daß die Elemente aus C zu einer divergenten Reihe angeordnet werden können, daß also C nicht unbedingt summierbar ist. — Es sei jetzt C_* absolut beschränkt, s' die obere, s'' die untere Grenze von C_*,

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_p + \cdots$$

eine beliebige aus den Elementen von C gebildete Reihe, und es habe wieder s_p die unter (3.) angegebene Bedeutung. Wird dann mit s'_p die Summe der positiven, mit s''_p die Summe der negativen Elemente aus s_p bezeichnet, wobei, wenn solche Elemente fehlen, die betreffende Summe gleich 0 zu setzen ist, so ist

$$(4.) \qquad s_p = s'_p + s''_p, \qquad (p=0,1,\ldots)$$

$$(5.) \qquad 0 \leqq s'_0 \leqq s'_1 \leqq \cdots, \qquad 0 \geqq s''_0 \geqq s''_1 \geqq \cdots .$$

Ist t irgendeine Partialsumme von C, so kann man p so wählen, daß alle in t eingehenden Elemente aus C auch in s_p auftreten. Dann aber ist $s'_p \geqq t \geqq s''_p$. Hieraus, und weil jedes s'_p und jedes s''_p eine Partialsumme darstellt, folgt, daß die obere Grenze von C_* zugleich obere Grenze aller s'_p, die untere Grenze von C_* untere Grenze aller s''_p wird. Unter Berücksichtigung von (4.) und (5.) erhält man also $\lim\limits_{p=\infty} s'_p = s'$, $\lim\limits_{p=\infty} s''_p = s''$ und daraus

$$\lim_{p=\infty} s_p = s' + s''.$$

Das besagt: *Für die unbedingte Summierbarkeit eines Systems C von reellen Zahlen ist notwendig und hinreichend, daß das System C_* der Partialsummen absolut beschränkt ist. Der Summenbereich von C besteht dann aus einer einzigen Zahl, nämlich aus der Summe der oberen und unteren Grenze von C_*.*

Wir betrachten nun ein abzählbares System Γ von komplexen Zahlen und eine aus den sämtlichen Zahlen von Γ gebildete Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots. \tag{6.}$$

Ist dann ξ eine beliebige komplexe Zahl, so konstituieren die Glieder der Reihe

$$\gamma_0\xi + \gamma_1\xi + \cdots + \gamma_p\xi + \cdots \tag{7.}$$

das reelle System $\xi\Gamma$. Die Reihe (6.) ist konvergent, wenn die Reihe (7.) für jedes ξ konvergiert; sie ist unbedingt konvergent, wenn die Reihe (7.) für jedes ξ unbedingt konvergiert. Anders ausgedrückt: Damit das System Γ unbedingt summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden Wert von ξ das reelle System $\xi\Gamma$ unbedingt summierbar ist. Dazu ist aber erforderlich, daß das System der Partialsummen von $\xi\Gamma$ d. i. $\xi\Gamma_*$ für jeden Wert von ξ absolut beschränkt ist, und das ist dann und nur dann der Fall, wenn Γ_* selbst absolut beschränkt ist (§ 6.).

Wir setzen jetzt Γ_* als absolut beschränkt voraus, bezeichnen für jedes ξ mit $g(\xi)$ die obere Grenze von $\xi\Gamma_*$ und setzen

$$g(\xi) - g(-\xi) = h(\xi), \tag{8.}$$

$$h(\varepsilon_1)\,\varepsilon_1 + \cdots + h(\varepsilon_n)\,\varepsilon_n = \sigma, \tag{9.}$$

so daß σ eine durch das System Γ an sich vollständig bestimmte Zahl ist. Nun ist $h(\xi)$ die Summe der oberen und unteren Grenze von $\xi\Gamma_*$; man erhält daher als Summe der unbedingt konvergenten Reihe (7.)

$$\gamma_0\xi + \gamma_1\xi + \cdots + \gamma_p\xi + \cdots = h(\xi). \tag{10.}$$

Aus (10.) folgt weiter

$$(\gamma_0\varepsilon_i)\,\varepsilon_i + (\gamma_1\varepsilon_i)\,\varepsilon_i + \cdots + (\gamma_p\varepsilon_i)\,\varepsilon_i + \cdots = h(\varepsilon_i)\,\varepsilon_i, \qquad (i=1, \ldots n)$$

hieraus unter Benutzung der Identität $(\gamma\varepsilon_1)\,\varepsilon_1 + \cdots + (\gamma\varepsilon_n)\,\varepsilon_n = \gamma$ und der Gleichung (9.)

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots = \sigma$$

und unter Berücksichtigung von (10.)

$$h(\xi) = \sigma\xi. \tag{11.}$$

Die Zahl σ, die sich als Summe des beliebig angeordneten Systems Γ ergibt, hat eine einfache geometrische Bedeutung, die aus der Betrachtung der kleinsten die Punktmenge $2\Gamma_*$ enthaltenden konvexen und abgeschlossenen Punktmenge $2\overline{\Gamma}'_*$ hervorgeht. Diese Menge wird nach § 11, Satz 3. von den Punkten gebildet, die allen $2\Gamma_*$ enthaltenden Halbräumen

gemein sind. Nun wird ein Halbraum von allen Punkten ξ erfüllt, die einer Ungleichung von der Form

$$\delta\xi \leqq c \tag{12.}$$

genügen, wo δ eine Richtung oder auch eine beliebige von 0 verschiedene komplexe Zahl bezeichnet. Da nun die obere Grenze von $2\delta\Gamma_*$ durch $2g(\delta)$ gegeben wird, so enthält der durch (12.) dargestellte Halbraum die Punktmenge $2\Gamma_*$ dann, wenn $c \geqq 2g(\delta)$ ist. Ein Punkt η gehört daher dann und nur dann der Menge $2\bar{\Gamma}'_*$ an, wenn für jeden Wert von δ

$$\delta\eta \leqq 2g(\delta) \tag{13.}$$

ist. Setzen wir $\eta - \sigma = \xi$, so wird mit Benutzung der Gleichungen (8.), (11.)

$$\delta\eta = \delta\sigma + \delta\xi = \delta\xi + h(\delta) = \delta\xi + g(\delta) - g(-\delta),$$

und die Ungleichung (13.) geht über in

$$\delta\xi \leqq g(\delta) + g(-\delta). \tag{14.}$$

Diese Ungleichung muß also für jeden Wert von δ bestehen, wenn der Punkt $\eta = \sigma + \xi$ der Menge $2\bar{\Gamma}'_*$ angehören soll. Stellen wir die Bedingung dafür auf, daß der Punkt $\sigma - \xi$ der Menge $2\bar{\Gamma}'_*$ angehört, so haben wir in (14.) $-\xi$ an die Stelle von ξ zu setzen. Da δ jeden beliebigen Wert haben kann, so dürfen wir überdies $-\delta$ an Stelle von δ schreiben. Dann erhalten wir aber genau wieder die Bedingung (14.). Wenn also von zwei Punkten $\sigma + \xi$, $\sigma - \xi$, d. h. von zwei Punkten, deren Verbindungsstrecke den Punkt σ zum Mittelpunkt hat, der eine der Punktmenge $2\bar{\Gamma}'_*$ angehört, so gehört auch der andere dieser Punktmenge an. Dies besagt aber nichts anderes, als daß σ Mittelpunkt von $2\bar{\Gamma}'_*$ ist.

Ebenso ist natürlich $\frac{\sigma}{2}$ Mittelpunkt von $\bar{\Gamma}'_*$. Da zu den Partialsummen von Γ auch die Zahl 0 gehört, so ist $\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}$ und darum auch $\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma$ in $\bar{\Gamma}'_*$ enthalten. Als Mittelpunkt der konvexen Punktmenge $2\bar{\Gamma}'_*$ gehört der Punkt σ natürlich auch dieser an. Einen zweiten Mittelpunkt kann $2\bar{\Gamma}'_*$ nicht haben. Denn wäre $\sigma' = \sigma + \tau$ ein solcher, k eine ganze Zahl, so würde, falls $\sigma + k\tau$ Punkt von $2\bar{\Gamma}'_*$ wäre (was für $k=0$, $k=1$ zuträfe), auch $\sigma - k\tau = \sigma' - (k+1)\tau$ und darum auch $\sigma' + (k+1)\tau = \sigma + (k+2)\tau$ Punkt von $2\bar{\Gamma}'_*$ sein. Es würde also $2\bar{\Gamma}'_*$ alle Punkte $\sigma + k\tau$ mit ganzzahligem k (wegen der Konvexität auch alle Punkte $\sigma + k\tau$

mit reellem k, also die Punkte der Verbindungsgeraden von σ und σ') enthalten. Dies ist aber nicht möglich, weil die Punktmenge $2\bar{\Gamma}'_*$ absolut beschränkt ist. Wir erhalten also folgendes Resultat:

Für die unbedingte Summierbarkeit eines Systems Γ *von komplexen Zahlen ist notwendig und hinreichend, daß das System* Γ_* *der Partialsummen absolut beschränkt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so besteht der Summenbereich von* Γ *aus einer einzigen Zahl* σ. σ *ist (einziger) Mittelpunkt der kleinsten das System* $2\Gamma_*$ *enthaltenden konvexen und abgeschlossenen Punktmenge* $2\bar{\Gamma}'_*$.*)

§ 14. Summierbarkeit und Summenbereich.

Die Frage nach der Summierbarkeit und dem Summenbereich einer abzählbaren Menge Γ von komplexen Zahlen findet ihre vollständige Beantwortung in dem folgenden Satze:

A) *Damit das abzählbare System* Γ *summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß* Γ *elementar und das System* Γ_* *der Partialsummen symmetrisch ausgedehnt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, und ist* r *die Klasse von* Γ_*, *so besitzt die Punktmenge* $2\bar{\Gamma}'_*$ *(ebenso wie* $\bar{\Gamma}'_*$*) Mittelpunkte, die insgesamt eine* r*-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit erfüllen. Diese Mannigfaltigkeit stellt den Summenbereich von* Γ *dar.*

Zunächst ist leicht zu sehen, daß die in Satz A) für die Summierbarkeit angegebenen Bedingungen notwendig sind. Denn wenn das System Γ summierbar und

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots \tag{15.}$$

eine aus den sämtlichen Elementen von Γ gebildete konvergente Reihe ist, so folgt in bekannter Weise, daß $\lim_{p=\infty} \gamma_p = 0$, also Γ ein elementares System (§ 12) ist. Ferner ergibt sich die Konvergenz der reellen Reihe

$$\gamma_0\xi + \gamma_1\xi + \cdots + \gamma_p\xi + \cdots \tag{16.}$$

für jedes ξ. Diese Konvergenz könnte nicht stattfinden, wenn man bei der Zerlegung der Reihe (16.) in ihren positiven und negativen Bestandteil eine konvergente und eine divergente Reihe erhielte oder, was offenbar dasselbe besagt, wenn das System $\xi\Gamma_*$ der Partialsummen nach der einen

*) Im Falle $n = 2$, also bei den gemeinen komplexen Zahlen, ist der Umfang des Flächenstückes $\bar{\Gamma}'_*$ gleich der doppelten Summe der absoluten Werte der Zahlen aus Γ.

Seite beschränkt, nach der andern unbeschränkt wäre. Wählt man für ξ eine Zahl vom absoluten Werte 1, so ist damit gezeigt, daß Γ_* nach den beiden Richtungen $\xi, -\xi$ beschränkt oder nach beiden unbeschränkt ist. Γ_* ist also ein System von symmetrischer Ausdehnung.

Nehmen wir jetzt an, Γ erfülle die beiden als für die Summierbarkeit notwendig erwiesenen Bedingungen, und bezeichnen wir mit r die Klasse des symmetrisch ausgedehnten Systems Γ_*, mit M das System der Zahlen ξ, für welche $\xi\Gamma_*$ beschränkt ist. Dann ist M ein Modul von der Dimension $n-r$, der zu M komplementäre Modul N hat die Dimension r.

Ist $r=0$, so ist Γ_* absolut beschränkt. Für diesen Fall haben wir im vorigen Paragraphen gezeigt, daß Γ summierbar, der Summenbereich von Γ ein einziger Punkt (also eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit) und dieser zugleich einziger Mittelpunkt von $2\overline{\Gamma}'_*$ ist. Damit ist aber die Richtigkeit des Satzes A) für den Fall $r=0$ erwiesen.

Ist $r=n$, so ist Γ_* total unbeschränkt; daher umfaßt $\overline{\Gamma}'_*$, ebenso $2\overline{\Gamma}'_*$ alle Punkte des Raumes (§ 11, Satz 2). Dann ist aber auch jeder Raumpunkt Mittelpunkt von $2\overline{\Gamma}'_*$; die Mittelpunkte erfüllen eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit. Was noch zu beweisen übrig bleibt, ist die Behauptung:

B) Ist Γ elementar, Γ_* total unbeschränkt, so kann jede Zahl als Summe einer aus den sämtlichen Elementen von Γ gebildeten Reihe dargestellt werden.

Wir wollen jetzt $0<r<n$ annehmen.

Die beiden komplementären Moduln M, N haben nur die Zahl 0 gemein, und jede Zahl ξ läßt sich, und zwar auf eine einzige Weise als Summe zweier Zahlen darstellen, von denen die eine zu M, die andere zu N gehört (§ 5). Wir nennen diese beiden Summanden die μ- und die ν-Komponente von ξ und bezeichnen sie mit ξ_μ und ξ_ν, so daß die Gleichung

$$\xi = \xi_\mu + \xi_\nu$$

identisch besteht. Für beliebige Zahlen ξ, η gelten ferner die Identitäten

$$\xi_\mu \eta_\nu = 0, \quad \xi\eta = \xi_\mu\eta_\mu + \xi_\nu\eta_\nu. \tag{17.}$$

Speziell hat man $\xi^2 = (\xi_\mu)^2 + (\xi_\nu)^2$ und darum

$$|\xi| \geqq |\xi_\mu|, \quad |\xi| \geqq |\xi_\nu|. \tag{18.}$$

Nimmt man mit jeder Zahl aus Γ die Zerlegung in ihre beiden Komponenten vor, und bezeichnet man mit $\Gamma_\mu = \mathsf{A}$ das System der μ-,

mit $\Gamma_\nu = \mathsf{B}$ das System der ν-Komponenten, so stellen A_* und B_* die Systeme der μ- bzw. ν-Komponenten von Γ_* dar. Bedeutet δ irgendeine komplexe Zahl, also δ_μ eine Zahl aus M, so ergibt sich aus (17.), daß $\delta_\mu \Gamma$ mit $\delta_\mu \mathsf{A}$ identisch ist, und in gleicher Weise ergeben sich die weiteren hier aufgeführten Identitäten:

$$(19.)\qquad \begin{aligned} \delta\mathsf{A} &= \delta_\mu \mathsf{A} = \delta_\mu \Gamma\,, \quad \delta\mathsf{B} = \delta_\nu \mathsf{B} = \delta_\nu \Gamma\,, \\ \delta\mathsf{A}_* &= \delta_\mu \mathsf{A}_* = \delta_\mu \Gamma_*, \quad \delta\mathsf{B}_* = \delta_\nu \mathsf{B}_* = \delta_\nu \Gamma_*. \end{aligned}$$

Aus den allgemeinen Ungleichungen (18.), und weil das System Γ als elementar vorausgesetzt wurde, folgt, daß auch A und B elementare Systeme sind. Wir wissen ferner, daß das System $\xi\Gamma_*$ beschränkt ist oder nicht, je nachdem ξ dem Modul M angehört oder nicht. Aus den Identitäten (19.) ist daher zu ersehen, daß das System $\delta\mathsf{A}_*$ bei beliebiger Wahl von δ beschränkt ist, das System $\delta\mathsf{B}_* = \delta_\nu \mathsf{B}_*$ aber nur dann, wenn δ zu M gehört, also $\delta_\nu = 0$ ist. A_* ist deshalb absolut beschränkt, und es folgt, daß A unbedingt summierbar ist und, zu einer Reihe angeordnet, stets dieselbe Summe σ liefert, wobei der Punkt $\sigma = \sigma_\mu$ einziger Mittelpunkt von $2\overline{\mathsf{A}}'_*$ ist (§ 13.). — Bezeichnen wir mit $g(\delta)$ die obere Grenze von $\delta\mathsf{A}_*$, so zeigt (19.), daß

$$(20.)\qquad g(\delta) = g(\delta_\mu)$$

und gleich der oberen Grenze von $\delta_\mu \Gamma_*$ ist.

Die Punkte ξ, welche einer Ungleichung von der Form

$$\delta\xi \leqq c \qquad (\delta \neq 0)$$

genügen, erfüllen einen Halbraum. Soll dieser Halbraum die Punktmenge $2\Gamma_*$ enthalten, so muß δ dem Modul M angehören und $c \geqq 2g(\delta)$ sein. Da die kleinste $2\Gamma_*$ enthaltende konvexe und abgeschlossene Punktmenge $2\overline{\Gamma}'_*$ der Durchschnitt aller $2\Gamma_*$ enthaltenden Halbräume ist, so folgt, daß der Punkt ξ der Punktmenge $2\overline{\Gamma}'_*$ angehört, wenn die Bedingung

$$(21.)\qquad \delta_\mu \xi \leqq 2g(\delta)$$

für jeden Wert von δ erfüllt ist. Aus $\delta_\mu \xi = \delta_\mu \xi_\mu$ ergibt sich weiter: ξ ist dann und nur dann Punkt von $2\overline{\Gamma}'_*$, wenn ξ_μ dieser Menge angehört. — Soll ein Punkt ξ dem Durchschnitt von $2\overline{\Gamma}'_*$ mit dem Modul M angehören, so muß neben der Ungleichung (21.) noch die Gleichung $\xi = \xi_\mu$ bestehen. Dann aber ist $\delta_\mu \xi = \delta_\mu \xi + \delta_\nu \xi = \delta\xi$, und (21.) geht über in

$$(22.)\qquad \delta\xi \leqq 2g(\delta).$$

Ist andererseits diese Ungleichung für jeden Wert δ erfüllt, so folgt aus

ihr und (20.) (indem man δ_μ für δ setzt) zunächst wieder die Ungleichung (21.). Weiter aber folgt aus (22.), wenn man ξ_ν für δ einsetzt und beachtet, daß das System $\xi_\nu \mathsf{A}_*$ nur aus Nullen besteht und demgemäß $g(\xi_\nu) = 0$ ist,

$$\xi_\nu^2 = \xi_\nu \xi \leqq 2\, g(\xi_\nu) = 0,$$

also $\xi_\nu = 0$, $\xi = \xi_\mu$. Die Bedingung (22.) ist daher gleichwertig mit den beiden Bedingungen $\delta_\mu \xi \leqq 2g(\delta)$, $\xi = \xi_\mu$. Zu der Ungleichung (22.) wird man aber auch sofort geführt, wenn man die Bedingung dafür sucht, daß ξ der Punktmenge $2\bar{\mathsf{A}}'_*$ angehören soll. Es stellt also $2\bar{\mathsf{A}}'_*$ den Durchschnitt von $2\bar{\Gamma}'_*$ und M dar, und wir können jetzt sagen: ξ ist dann und nur dann Punkt von $2\bar{\Gamma}'_*$, wenn ξ_μ Punkt von $2\bar{\mathsf{A}}'_*$ ist.

Ein Punkt ω ist Mittelpunkt von $2\bar{\Gamma}'_*$, wenn für beliebiges ξ die Punkte $\omega + \xi$, $\omega - \xi$ beide zu $2\bar{\Gamma}'_*$ gehören oder nicht gehören. Diese Forderung ist nach den letzten Ergebnissen gleichwertig mit der Forderung, daß die Punkte $\omega_\mu + \xi_\mu$, $\omega_\mu - \xi_\mu$ beide zu $2\bar{\mathsf{A}}'_*$ gehören oder nicht gehören müssen. Dies ist wiederum der Ausdruck dafür, daß ω_μ Mittelpunkt von $2\bar{\mathsf{A}}'_*$ also gleich σ sein muß. Daraus folgt, daß die Mittelpunkte von $2\bar{\Gamma}'_*$ die r-dimensionale Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N}$ konstituieren.

Wird das System Γ zu einer Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots \tag{23.}$$

angeordnet, und werden mit α_p, β_p die Komponenten von γ_p bezeichnet, so ist die Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \cdots$$

konvergent, ihre Summe gleich σ. Die Reihe (23.) konvergiert also, wenn die Reihe

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p + \cdots \tag{24.}$$

konvergent ist. Die Glieder dieser Reihe konstituieren das dem Modul N angehörige System B. Falls also die Reihe (24.) konvergiert, ist ihre Summe eine Zahl aus N, die Summe der Reihe (23.) gehört also der linearen Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N}$ an. Nun läßt sich aber der Modul N als ein System komplexer Zahlen mit r Einheiten $\varepsilon'_1, \ldots \varepsilon'_r$ ansehen. Man braucht nämlich für $\varepsilon'_1, \ldots \varepsilon'_r$ nur irgendein System orthogonaler Richtungen aus N auszuwählen; dann läßt sich jede Zahl aus N auf eine Weise in der Form $c_1 \varepsilon'_1 + \cdots + c_r \varepsilon'_r$ darstellen, und es gelten für das Operieren mit diesen Zahlen alle die Regeln, welche wir in § 1 und § 3 (Definition

des Produktes $\alpha\beta$ und des absoluten Wertes) für das Operieren mit den Zahlen von der Form $c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n$ festgesetzt hatten. Für jede von 0 verschiedene Zahl δ_ν aus N ist, wie gezeigt wurde, das System $\delta_\nu \mathsf{B}_*$ unbeschränkt.

Wir können also sagen, daß das System B_*, innerhalb N betrachtet, total unbeschränkt ist. Da ferner das System B elementar ist, so folgt — sofern die Behauptung B) richtig ist —, daß sich B zu einer konvergenten Reihe anordnen läßt, deren Summe einen innerhalb N willkürlich vorgeschriebenen Wert hat. Damit wäre aber gezeigt, daß der Summenbereich von Γ die ganze Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N}$ umfaßt. Wir sehen also, daß wir, um den Beweis des Satzes A) vollständig zu erledigen, nur noch den Beweis für die Behauptung B) zu erbringen haben. Dieser Beweis ist freilich der einzige schwierigere Punkt in diesen Untersuchungen. Wir müssen demselben eine Reihe von Hilfssätzen vorausschicken.

§ 15. Hilfssätze zum Beweise der Behauptung B).

1. *Läßt sich die Zahl γ aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mit Koeffizienten komponieren, die zwischen* 0 *und* 1 *liegen, besteht also eine Gleichung von der Form*

$$(25.)\quad \gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p \quad (0 \leqq a_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq a_p \leqq 1),$$

so gibt es unter den Gleichungen dieser Art auch solche, in denen nicht mehr als n Koeffizienten einen von 0 *und* 1 *verschiedenen Wert haben.*

Beweis: Wenn in der vorgelegten Gleichung (25.) mehr als n Zahlen α einen von 0 und 1 verschiedenen Koeffizienten haben, so kann man aus diesen Zahlen α $n+1$ oder weniger als $n+1$ solche auswählen, zwischen denen eine lineare Relation mit nicht verschwindenden Koeffizienten besteht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß die ersten r $(r \leqq n+1)$ Zahlen α diese Eigenschaft haben, daß also

$$0 < a_1 < 1, \ldots 0 < a_r < 1 \quad (1 \leqq r \leqq n+1)$$

ist und eine Gleichung

$$(26.)\qquad b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r = 0 \quad (b_1 \neq 0, \ldots b_r \neq 0)$$

besteht. Aus (25.), (26.) folgt für beliebiges x

$$(27.)\quad \gamma = (a_1 - b_1 x)\,\alpha_1 + \cdots + (a_r - b_r x)\,\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_p\alpha_p.$$

Der Koeffizient $a_i - b_i x$ $(i = 1, \ldots r)$ liegt zwischen 0 und 1, wenn x zwischen $\frac{a_i}{b_i}$ und $\frac{a_i - 1}{b_i}$ liegt. Diese beiden Zahlen sind $\neq 0$ und haben verschiedenes

Vorzeichen. Bezeichnen wir die positive mit c_i, die negative mit $-d_i$, mit c bzw. d die kleinste der Zahlen c_i bzw. d_i $(i=1,\dots r)$, und setzen wir $x=c$ oder $x=-d$, so liegen in (27.) die Koeffizienten von $\alpha_1,\dots\alpha_p$ sämtlich zwischen 0 und 1, von den Koeffizienten der Zahlen $\alpha_1,\dots\alpha_r$ ist aber wenigstens einer gleich 0 oder gleich 1. Die Anzahl der von 0 und 1 verschiedenen Koeffizienten ist also in (27.) sicher kleiner als in (25.). Ist sie noch immer größer als n, so können wir den Schluß wiederholen und gelangen so zum Beweise unseres Satzes.

2. *Besteht zwischen den Zahlen $\alpha_1,\dots\alpha_p$ eine Gleichung*

$$a_1\alpha_1+\cdots+a_p\alpha_p=0, \tag{28.}$$

in welcher die p Koeffizienten den beiden Bedingungen genügen:

1) *sie liegen alle zwischen* 0 *und* 1 *(die Grenzen eingeschlossen),*

2) *nicht mehr als $2n$ von ihnen sind von* 1 *verschieden*),*

so ist es möglich, aus den Zahlen $\alpha_1,\dots\alpha_p$ eine solche auszuscheiden, daß zwischen den zurückbleibenden wieder eine Gleichung besteht, deren $p-1$ Koeffizienten den Bedingungen 1) *und* 2) *genügen.*

Beweis. Wir bezeichnen mit k die Anzahl derjenigen Koeffizienten in (28.), die von 0 und 1 verschieden sind. Der Bedingung 2) gemäß ist $k\leqq 2n$. Falls $k>n$ ist, nehmen wir wieder unbeschadet der Allgemeinheit an, daß die ersten k Koeffizienten von 0 und 1 verschieden sind. Setzen wir

$$\gamma=a_1\alpha_1+\cdots+a_k\alpha_k, \tag{29.}$$

so folgt aus Satz 1., daß auch eine Gleichung

$$\gamma=a_1'\alpha_1+\cdots+a_k'\alpha_k \tag{30.}$$

besteht, in welcher alle Koeffizienten a' zwischen 0 und 1 liegen und höchstens n unter ihnen von 0 und 1 verschieden sind. Aus (28.), (29.), (30.) folgt die Gleichung

$$a_1'\alpha_1+\cdots+a_k'\alpha_k+a_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+a_p\alpha_p=0,$$

deren p Koeffizienten wieder die Bedingungen 1) und 2) erfüllen, überdies aber noch die folgende:

3) *nicht mehr als n von ihnen sind von* 0 *und* 1 *verschieden.*

Wir können daher bei der Fortsetzung unseres Beweises annehmen, daß die p Koeffizienten in (28.) den Bedingungen 1), 2), 3) genügen.

*) Ist $p\leqq 2n$, so existiert eine solche Gleichung immer, da wir den Fall, daß in (28.) alle Koeffizienten verschwinden, nicht ausschließen wollen.

Wenn nun ein Koeffizient a_i verschwindet, so stellt die Gleichung (28.) selbst, wenn wir das Glied mit α_i streichen, die Gleichung zwischen den übrigen Zahlen α dar, deren Existenz unser Satz 2. behauptet. — Wir brauchen uns also nur noch mit dem Fall zu beschäftigen, daß in (28.) alle Koeffizienten positiv sind. Aus 3) folgt jetzt, daß höchstens n Koeffizienten von 1 verschieden sind. Dividieren wir Gleichung (28.) durch $a_1 + \cdots + a_p$, so sehen wir, daß sich die Zahl 0 aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten von der Summe 1 komponieren läßt. Dann aber folgt (§ 10, Satz 2.), daß man unter den Zahlen α $n+1$ oder weniger als $n+1$ solche finden kann, aus denen sich die 0 mittels positiver Koeffizienten komponieren läßt. Wir denken uns diese Zahlen α wieder an den Anfang gestellt, haben dann also eine Gleichung von der Form

$$b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r = 0 \quad (b_1 > 0, \ldots b_r > 0;\ 1 \leqq r \leqq n+1).$$

Aus dieser und (28.) folgt

$$(31.)\quad (a_1 - b_1 x)\alpha_1 + \cdots + (a_r - b_r x)\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_p\alpha_p = 0$$

bei beliebigem x. Von den Koeffizienten in (28.) sind höchstens n, von den Koeffizienten in (31.) also höchstens $2n+1$ von 1 verschieden. Nehmen wir für x die kleinste der Zahlen $\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_r}{b_r}$, so liegen in (31.) alle Koeffizienten zwischen 0 und 1, und wenigstens einer von ihnen, etwa der von α_i, ist 0. Lassen wir jetzt in (31.) das Glied mit α_i fort, so haben wir eine Gleichung zwischen den übrigen Zahlen α, welche den Bedingungen 1) und 2) genügt. — Damit ist Satz 2. bewiesen.

3. *Bezeichnet* A *ein System von* p *Zahlen* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$, *so besteht* $\overline{\mathsf{A}}_*$ *aus allen Zahlen, die sich aus* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ *mittels Koeffizienten komponieren lassen, die zwischen* 0 *und* 1 *liegen.**)

Beweis: Wir bezeichnen mit Γ das System aller Zahlen von der Form

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \qquad (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p \leqq 1);$$

unsere Aufgabe ist dann der Nachweis der Identität $\Gamma = \overline{\mathsf{A}}_*$. — Zunächst erkennt man, daß $\overline{\mathsf{A}}_*$ in Γ enthalten ist, weil, wie man sofort sieht, jede Partialsumme aus A zu Γ gehört und Γ konvex ist. Denn wenn

---

*) Die geometrische Deutung des Satzes ist die, daß man $\overline{\mathsf{A}}_*$ als Projektion eines p-dimensionalen Parallelepipeds auffassen kann, wobei die Elemente von A_* die Projektionen der Ecken werden.

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \ (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p \leqq 1),$$
$$\gamma' = c_1'\alpha_1 + \cdots + c_p'\alpha_p \ (0 \leqq c_1' \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p' \leqq 1)$$

Punkte aus Γ sind und δ zwischen γ und γ' liegt, so hat man

$$\delta = a\gamma + (1-a)\gamma' \ (0 \leqq a \leqq 1),$$

also

$$\delta = (ac_1 + (1-a)c_1')\alpha_1 + \cdots + (ac_p + (1-a)c_p')\alpha_p,$$

wobei

$$0 \leqq (ac_i + (1-a)c_i') \leqq a + (1-a) = 1 \qquad (i=1, \ldots p)$$

ist. δ ist also Punkt von Γ. — Es bleibt noch zu zeigen, daß $\bar{\mathsf{A}}_*$ alle Punkte aus Γ enthält. Diesen Nachweis führen wir durch Induktion. Im Falle $p = 1$ besteht A_* aus den beiden Punkten 0 und α_1, $\bar{\mathsf{A}}_*$ also aus den zwischen 0 und α_1 gelegenen Punkten, d. h. aus allen Punkten $c_1\alpha_1$ $(0 \leqq c_1 \leqq 1)$, wie es unser Satz behauptet. Ist $p > 1$, so bezeichnen wir mit B das aus den Punkten $\alpha_1, \ldots \alpha_{p-1}$ bestehende System. Dann ist als erwiesen anzusehen, daß $\bar{\mathsf{B}}_*$ alle Punkte γ' von der Form

$$\gamma' = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{p-1}\alpha_{p-1} \ (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_{p-1} \leqq 1)$$

umfaßt. Das System A_* besteht aus den Punkten der beiden Systeme B_* und $\mathsf{B}_* + \alpha_p$; in $\bar{\mathsf{A}}_*$ sind daher alle Punkte von $\bar{\mathsf{B}}_*$, ebenso alle Punkte der kleinsten konvexen $\mathsf{B}_* + \alpha_p$ enthaltenden Punktmenge, d. i. $\bar{\mathsf{B}}_* + \alpha_p$, enthalten. Ist nun

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \ (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p \leqq 1)$$

irgendein Punkt von Γ, so gehört

$$\gamma' = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{p-1}\alpha_{p-1}$$

dem System $\bar{\mathsf{B}}_*$, $\gamma' + \alpha_p$ dem System $\bar{\mathsf{B}}_* + \alpha_p$ an. Beide Punkte sind demnach in $\bar{\mathsf{A}}_*$ enthalten, und da $\bar{\mathsf{A}}_*$ konvex ist, so ist auch der zwischen γ' und $\gamma' + \alpha_p$ gelegene Punkt $(1-c_p)\gamma' + c_p(\gamma' + \alpha_p) = \gamma' + c_p\alpha_p = \gamma$ Punkt von $\bar{\mathsf{A}}_*$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

I. *Ist* A *ein endliches oder unendliches System komplexer Zahlen, deren absolute Werte die positive Zahl* m *nicht überschreiten, so gibt es zu jeder Zahl* γ *aus* $\bar{\mathsf{A}}_*$ *wenigstens eine Zahl* σ *aus* A_*, *für welche*

$$|\gamma - \sigma| \leqq nm$$

*wird.**)

---

*) Man kann noch weitergehen und die angegebene Zahl nm durch $\frac{1}{2}\sqrt{n} \cdot m$ ersetzen. Dies ist die kleinste Zahl, für welche der obige Satz noch allgemein richtig ist.

Beweis: Es sei γ eine Zahl aus $\bar{\mathsf{A}}_*$. Dann kann man (§ 10, Satz 4.) ein System Γ von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Zahlen aus A_* finden derart, daß γ der Punktmenge $\bar{\Gamma}$ angehört. Jedes Element aus Γ ist eine Summe von endlichvielen Elementen aus A. Daher gibt es ein endliches Teilsystem B von A derart, daß B_* alle Elemente aus Γ enthält. γ gehört dann der Punktmenge $\bar{\mathsf{B}}_*$ an. Es bestehe B aus den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_p$. Dann ist nach Satz 3. γ in der Form

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \qquad (0 \leqq c_1 \leqq 1, \dots 0 \leqq c_p \leqq 1) \tag{32.}$$

darstellbar, und nach Satz 1. dürfen wir voraussetzen, daß unter den Koeffizienten c in (32.) nicht mehr als n von 0 und 1 verschieden sind. Setzen wir jetzt

$$\gamma = \sigma + \tau,$$

wo σ diejenigen Glieder aus (32.), deren Koeffizient 0 oder 1 ist, τ die übrigen umfaßt, so stellt σ eine Partialsumme des Systems A dar, τ besteht aus höchstens n Gliedern $c_i\alpha_i$; und da $|\alpha_i| \leqq m$, $0 < c_i < 1$ ist, folgt $|\tau| \leqq nm$, also

$$|\gamma - \sigma| \leqq nm,$$

w. z. b. w.

4. *Hat man eine endliche Anzahl komplexer Zahlen, deren absolute Werte* $\leqq m$ *sind und deren Summe* 0 *ist, so lassen dieselben eine solche Anordnung*

$$\alpha_1, \dots \alpha_p$$

zu, daß die absoluten Werte der Zahlen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \sigma_k \qquad (k=1, \dots p) \tag{33.}$$

sämtlich $\leqq 2nm$ *sind.*

Beweis: Nach Voraussetzung besteht zwischen den gegebenen Zahlen, deren Anzahl p sein möge, eine lineare Relation, in welcher alle Koeffizienten gleich 1 sind, also den Bedingungen 1) und 2) des Satzes 2. entsprechen. Nach diesem Satze können wir daher aus den gegebenen Zahlen nacheinander erst eine Zahl — sie heiße α_p —, dann eine zweite Zahl — sie heiße α_{p-1} — usf. fortlassen in der Weise, daß jedesmal zwischen den noch übrigen Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_k$ wieder eine Relation besteht, deren Koeffizienten den Bedingungen 1) und 2) genügen. Ziehen wir diese zwischen $\alpha_1, \dots \alpha_k$ bestehende Relation von der Gleichung (33.) ab, so erhalten wir rechts σ_k, während auf der linken Seite höchstens $2n$ Glieder (mit nicht verschwindenden Koeffizienten) übrig bleiben. Jedes dieser

Glieder hat die Form $c_i \alpha_i$, wo $0 < c_i \leqq 1, |\alpha_i| \leqq m$ ist. Hieraus folgt $|\sigma_k| \leqq 2nm$, wie behauptet wurde.

Hat man ein System A von p Zahlen, deren absolute Werte $\leqq m$ sind, und hat ihre Summe σ einen absoluten Wert $\leqq qm$, wo q eine natürliche Zahl bedeutet, so erhält man, indem man noch q-mal die Zahl $-\frac{\sigma}{q}$ hinzunimmt, ein System B, dessen Zahlen absolut wieder $\leqq m$ sind und die Summe 0 haben. Die Zahlen von B kann man nach Satz 4. zu einer solchen Folge

$$\beta_1, \dots \beta_{p+q} \tag{34.}$$

anordnen, daß die absoluten Werte der Summen

$$\beta_1 + \cdots + \beta_r \qquad (r=1, \dots p+q) \tag{35.}$$

$\leqq 2nm$ sind. Läßt man aus der Folge (34.) wieder die q Zahlen $-\frac{\sigma}{q}$ fort, so bleibt das System A in einer solchen Anordnung

$$\alpha_1, \dots \alpha_p$$

zurück, daß jede Summe

$$\alpha_1 + \cdot \cdot + \alpha_k \qquad (k=1, \dots p) \tag{36.}$$

aus einer Summe (35.) durch Fortlassung von höchstens q Zahlen $-\frac{\sigma}{q}$ erhalten werden kann. Daraus folgt, daß die absoluten Werte der Summen (36.) die Zahl $2nm + q\left|\frac{\sigma}{q}\right|$, also auch die Zahl $(2n+q)m$ nicht überschreiten können, und wir erhalten den Satz:

II. *Hat man eine endliche Anzahl komplexer Zahlen, deren absolute Werte $\leqq m$ sind, und hat ihre Summe σ einen absoluten Wert $\leqq q\,m$, wo q eine ganze nicht negative Zahl bedeutet*), so lassen die gegebenen Zahlen eine solche Anordnung*

$$\alpha_1, \dots \alpha_p$$

zu, daß die absoluten Werte der Summen

$$\sigma_k = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \qquad (k=1, \dots p)$$

sämtlich $\leqq (2n+q)m$ sind.

§ 16. Beweis der Behauptung B).

Auf Grund der Sätze I, II des vorigen Paragraphen ist der Beweis für die Behauptung B) leicht zu erbringen. Es sei also jetzt Γ ein ele-

*) Man sieht leicht, daß die Beschränkung auf einen ganzzahligen Wert nicht nötig ist.

mentares abzählbares System komplexer Zahlen, Γ_* total unbeschränkt. Dann ist zu zeigen, daß sich Γ zu einer konvergenten Reihe von beliebig vorgeschriebener Summe anordnen läßt.

Zunächst ist klar, daß, wenn man aus Γ endlichviele Elemente fortläßt, die Partialsummen des zurückbleibenden Systems B noch immer total unbeschränkt sind. Daraus folgt, daß $\bar{\mathsf{B}}_*$ alle Punkte des Raumes umfaßt, und hieraus, wenn σ einen beliebigen Punkt, g die obere Grenze der absoluten Werte der Zahlen aus B bedeutet, daß es eine Partialsumme π des Systems B gibt, welche der Bedingung $|\sigma - \pi| \leqq ng$ genügt (§ 15, I). Von dieser Partialsumme π können wir überdies verlangen, daß sie ein gegebenes Element β aus B (als Summanden) enthält. Denn wir können ja aus den übrigen Elementen von B eine Partialsumme π' herausgreifen, welche der Bedingung $|(\sigma - \beta) - \pi'| \leqq ng$ genügt. Dann besitzt die Partialsumme $\pi = \beta + \pi'$ die verlangten Eigenschaften.

Wir denken uns nun eine beliebige Anordnung

(37.) $$\gamma_0, \gamma_1, \cdots \gamma_p, \cdots$$

des Systems Γ zugrunde gelegt und wollen aus dieser eine bestimmte neue Anordnung herleiten, bei welcher die Summe nach einem vorgeschriebenen Wert σ konvergiert. Zu diesem Zweck nehmen wir mit den Partialsummen eine Numerierung vor. (Das leere System lassen wir beiseite.) Als Nummer einer Partialsumme π bezeichnen wir die natürliche Zahl, welche wir erhalten, wenn wir jeden Summanden γ_k durch 2^k ersetzen. Da jede natürliche Zahl sich auf eine Weise im dyadischen System schreiben, d. h. als Summe verschiedener Potenzen von 2 mit ganzen, nicht negativen Exponenten darstellen läßt, so ist jede natürliche Zahl Nummer einer bestimmten Partialsumme. Auf diese Anordnung der Partialsummen nehmen wir im folgenden Bezug.

Bezeichnen wir mit g_k ($k = 0, 1, \ldots$ in inf.) die obere Grenze der Zahlenmenge

$$|\gamma_k|, |\gamma_{k+1}|, \cdots |\gamma_{k+p}|, \cdots,$$

so ist

(38.) $$g_k > 0, \quad g_k \geqq g_{k+1}, \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

(39.) $$\lim_{k=\infty} g_k = 0,$$

und es gibt unter den Partialsummen π, die γ_0 enthalten, solche, welche der Bedingung $|\pi - \sigma| \leqq ng_0$ genügen. Die erste Partialsumme, welche

diese Eigenschaft besitzt, sei mit π_0 bezeichnet, mit Γ_1 das System, welches zurückbleibt, wenn aus Γ die in π_0 eintretenden Elemente fortgelassen werden. Die obere Grenze der absoluten Werte der Elemente von Γ_1 ist dann $\leqq g_1$. Wir können daher aus Γ_1 eine Partialsumme π herausgreifen, welche das erste Element von Γ_1 enthält und der Bedingung $|\pi_0+\pi-\sigma|\leqq n g_1$ genügt. Es sei π_1 die erste solche Partialsumme, Γ_2 das System, welches zurückbleibt, wenn wir aus Γ_1 die Elemente von π_1 entfernen, π_2 die erste Partialsumme aus Γ_2, welche das erste Element von Γ_2 enthält und der Bedingung $|\pi_0+\pi_1+\pi_2-\sigma|\leqq n g_2$ genügt usf. Wir erhalten so eine Folge von Partialsummen

$$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots$$

von der Beschaffenheit, daß jedes Element aus Γ in einer und nur einer dieser Partialsummen auftritt und daß

$$|\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k-\sigma|\leqq n g_k \qquad (k=0,1,\ldots) \tag{40.}$$

ist. Aus $\pi_k=(\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k-\sigma)-(\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_{k-1}-\sigma)$ und (40.) folgt

$$\pi_k\leqq n(g_k+g_{k-1})\leqq 2ng_{k-1}. \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{41.}$$

Es sei p_k die Anzahl der Summanden, aus denen sich π_k zusammensetzt. Ist dann $k\geqq 1$, so folgt aus (41.) und § 15, II, da die in π_k enthaltenen Elemente γ absolut $\leqq g_k\leqq g_{k-1}$ sind, daß man diesen Elementen eine solche Anordnung

$$\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \cdots \gamma_{kp_k} \tag{42.}$$

geben kann, daß die Ungleichungen

$$|\gamma_{k1}+\gamma_{k2}+\cdots+\gamma_{kl}|\leqq 4ng_{k-1} \qquad (l=1,\ldots p_k) \tag{43.}$$

bestehen. Natürlich kann es mehrere Anordnungen dieser Art geben. Um eine bestimmte zu fixieren, denken wir uns die $p_k!$ Permutationen der Elemente aus π_k lexikographisch angeordnet, wobei die Anordnung (37.) die Rolle des Alphabets spielen soll, und nehmen an, daß die unter (42.) angegebene Permutation die erste ist, welche den Bedingungen (43.) genügt. Die Elemente von π_0 nehmen wir in der Anordnung an, die sie in (37.) haben. So erhalten wir eine bestimmte Anordnung der Elemente von Γ zu einer unendlichen Reihe

$$\gamma_{01}+\cdots+\gamma_{0p_0}+\gamma_{11}+\cdots+\gamma_{1p_1}+\cdots+\gamma_{k1}+\cdots+\gamma_{kp_k}+\cdots. \tag{44.}$$

Bezeichnet σ_{kl} die Summe des mit dem Gliede γ_{kl} schließenden Abschnitts dieser Reihe, so folgt aus (40.), (43.), falls $k\geqq 1$ ist,

$$|\sigma_{kl} - \sigma| \leqq 5\, n\, g_{k-1},$$

und hieraus und aus (39.) ergibt sich, daß die Reihe (44.) konvergiert und die Summe σ hat.

Hiermit ist nun auch der Satz A) vollständig bewiesen, und wir sehen, daß der Summenbereich eines Systems komplexer Zahlen immer eine lineare Mannigfaltigkeit sein muß. — Um zu zeigen, daß jede lineare Mannigfaltigkeit als Summenbereich auftreten kann, braucht man die vorangehenden Entwicklungen nicht; vielmehr ergibt sich dies leicht aus dem *Riemann*schen Satze, nach welchem ein reelles abzählbares und elementares System, dessen Partialsummen nach oben und unten unbeschränkt sind, das ganze reelle Gebiet zum Summenbereich hat. Es bezeichne nämlich C ein solches System, A irgendein unbedingt summierbares System von der Summe 1. Ist dann eine beliebige Mannigfaltigkeit Λ gegeben, so kann man $\Lambda = \sigma + \mathsf{N}$ setzen, wo N der zu Λ parallele Modul ist und σ dem zu N komplementären Modul angehört. Ist r die Dimension von N, und stellen die r orthogonalen Richtungen $\varepsilon_1', \ldots \varepsilon_r'$ eine Basis von N dar, so zeigt eine einfache Überlegung, daß die $r+1$ komplexen Zahlsysteme $A\sigma, C\varepsilon_1', \ldots C\varepsilon_r'$ insgesamt ein abzählbares System Γ konstituieren, welches summierbar ist und die Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N} = \Lambda$ zum Summenbereich hat.

(Fortsetzung folgt.)

Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze.

Von Herrn *H. Weyl* in Zürich.

§ 1.

In einer letzthin in diesem Journal erschienenen Note*) habe ich mich unter dem Titel „Hohlraumstrahlung“ mit der Integration der Schwingungsgleichung

$$\Delta \mathfrak{u} + \lambda \mathfrak{u} = 0 \qquad (\lambda = \text{const.})$$

in einem räumlichen Gebiet J beschäftigt, wenn an der Begrenzung $\mathfrak{O}$ von J für das gesuchte Vektorfeld $\mathfrak{u}$ eines der beiden folgenden Systeme von Randbedingungen vorgeschrieben ist:

1) $\mathfrak{u}$ normal, $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n}$ tangential;

2) $\mathfrak{u}$ tangential, $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n}$ normal.

n bedeutet die innere Normale an der Begrenzung, $\mathfrak{n} = (X, Y, Z)$ den in Richtung derselben aufgetragenen Einheitsvektor, u_n allgemein die in dieser Richtung genommene Komponente eines Vektorfeldes $\mathfrak{u}$. Der Buchstabe p soll wieder zur Bezeichnung der in J gelegenen Punkte dienen, der Buchstabe o zur Bezeichnung der Punkte auf der Begrenzung von J. Ich habe diese beiden Probleme verglichen einerseits mit dem „dreidimensionalen Membranproblem“

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } J;\ u = 0 \text{ an der Begrenzung,}$$

*) Bd. 141, S. 163—181. Diese Arbeit zitiere ich mit C II, die eng damit zusammenhängende Note auf S. 1—11 desselben Bandes mit C I. Außerdem habe ich öfter auf A = Math. Ann., Bd. 71, S. 441—479 zu verweisen.

andrerseits mit dem „akustischen Problem“

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } J; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ an der Begrenzung,}$$

und festgestellt:

Satz I. *Das Problem* 1) *besitzt unterhalb einer beliebigen Grenze mindestens dreimal soviel Eigenwerte* λ *wie das dreidimensionale Membranproblem.*

Satz II. *Zu den Randbedingungen* 2) *gehören unterhalb einer beliebigen Grenze höchstens dreimal soviel Eigenwerte* λ, *als das akustische Problem besitzt.*

Diese beiden Sätze sowie der a. a. O. geführte Beweis sind zutreffend; hingegen sind, worauf mich Herr *Levi-Civita* in einer Mitteilung aufmerksam gemacht hat, für die ich ihm zu großem Danke verpflichtet bin, *die Randbedingungen* 1) *und* 2) *nicht diejenigen, welche für das Problem der Hohlraumstrahlung maßgebend sind.* In der Strahlungstheorie handelt es sich vielmehr darum, die Schwingungsgleichung $\Delta \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{E} = 0$ [$\mathfrak{E}$ = Amplitude der elektrischen Feldstärke] unter den Oberflächenbedingungen

$$1_*) \qquad \mathfrak{E} \text{ normal, } \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

zu integrieren. Ich hatte geglaubt, in Anbetracht des Umstandes, daß $\mathfrak{E}$ am Rande normal ist, die letzte Randbedingung durch die unter 1) enthaltene „Normalkomponente von $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}$ gleich 0“ ersetzen zu können. Hier liegt indes ein Irrtum vor. Ich möchte daher nochmals auf das Problem der Hohlraumstrahlung zurückkommen, zumal sich mir dadurch Gelegenheit bietet, auch über einige Erweiterungen und Vereinfachungen meiner Methode zu berichten.

Unter den Eigenwerten λ von $1_*)$ sind die sämtlichen Eigenwerte des dreidimensionalen Membranproblems mitenthalten; erst wenn man diese streicht, bleiben die Eigenwerte $\lambda = \left(\frac{\nu}{c}\right)^2$ [c = Lichtgeschwindigkeit] des eigentlichen Strahlungsproblems übrig. Es liegt das daran, daß nicht nur an der Oberfläche, sondern im ganzen Innern von J die Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ erfüllt sein muß [vgl. C II, S. 175, 176]. Die Zahlen $\nu = c\sqrt{\lambda}$ sind die Frequenzen der in dem Hohlraum J möglichen elektromagnetischen Eigenschwingungen, falls die Begrenzungen von J auf der dem Hohlraum zugewandten Seite als vollkommene Spiegel ausgebildet sind.

Die Grundlage für die Behandlung des Randwertproblems 1_*) *liefert eine Identität, die eine gewisse Analogie zu der bekannten Greenschen Formel*

$$(1.)\qquad \int_J (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \Delta v)\, dp = -\int_{\mathfrak{O}} u \frac{\partial v}{\partial n}\, do$$

darbietet. Sie lautet, wenn wir von der üblichen Bezeichnung der skalaren und vektoriellen Multiplikation Gebrauch machen:

$$(2.)\qquad \int_J (\operatorname{curl} \mathfrak{u} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{v} + \operatorname{div} \mathfrak{u} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mathfrak{u} \cdot \Delta \mathfrak{v})\, dp = -\int_{\mathfrak{O}} ([\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{v} + u_n \operatorname{div} \mathfrak{v})\, do.$$

Indem man bei jeder einzelnen Verwendung der *Green*schen Formel (1.) diese durch die neue Gleichung (2.) ersetzt, kann man die Schlüsse, durch welche ich in C I, § 5 und C II, §§ 2, 3 Einsicht in die Eigenwertverteilung des akustischen Problems gewann, Schritt für Schritt auf 1_*) übertragen. Dabei werden sich also diese beiden Sätze ergeben:

a) Die Schwingungsgleichung $\Delta \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{E} = 0$ hat unter den Oberflächenbedingungen 1_*) abzählbar unendlich viele Lösungen

$$\lambda = \sigma_i, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i(p).$$

Die σ_i, die wir uns ihrer Größe nach geordnet denken, sind alle positiv; nur wenn J von mehr als einer, sagen wir von $h+1$ getrennten Oberflächen begrenzt wird, sind h dieser Eigenwerte $= 0$. *Unterhalb einer beliebigen Grenze liegen mindestens dreimal soviel* σ_n *als Eigenwerte des dreidimensionalen Membranproblems, d. h. Satz I bleibt gültig, wenn die Randbedingungen* 1) *durch* 1_*) *ersetzt werden.*

b) *Es gilt das asymptotische Gesetz:*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{n^{2/3}} = \left(\frac{2\pi^2}{J}\right)^{2/3}.$$

Es ist mir aber inzwischen gelungen, die in C II, §§ 2, 3 verwendete Schlußweise (unter Wahrung des Grundgedankens) wesentlich zu vereinfachen. Dort hatte ich, um von den reziproken Eigenwerten δ_n des Kernes $D = H - G$ einzusehen, daß sie (im zweidimensionalen Fall) stärker gegen 0 konvergieren als $\frac{1}{n}$, D nach den Eigenfunktionen von H entwickelt und mich auf einen wichtigen Satz von *E. Schmidt* gestützt. Rascher und ohne solche Hilfsmittel gelangt man zum Ziel, wenn man einfach der Tatsache, daß die Spur einer quadratischen Form gegenüber orthogonaler Transformation invariant ist, durch die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{d}_n = \int_J D(pp)\,dp$$

Ausdruck verleiht und *berücksichtigt, daß alle* $\mathfrak{d}_n > 0$ *sind.* Im zweidimensionalen Falle ist die rechter Hand stehende „Integralspur" von D endlich und daher $\lim_{n=\infty} n\,\mathfrak{d}_n = 0$; im dreidimensionalen Fall trifft das freilich nicht zu, aber man findet durch eine leichte Modifikation des Verfahrens, daß wenigstens

$$\mathfrak{d}_n \leqq \text{Const.}\,\frac{\lg n}{n}$$

wird, ein Resultat, das auch hinsichtlich der Schärfe der Abschätzung mehr aussagt, als meine frühere Methode lieferte. Den hiermit skizzierten Gedankengang führe ich in §§ 2 und 3 dieser Arbeit für das Strahlungsproblem durch.

Es entsteht so eine auf den in meinen vorigen Noten benutzten Prinzipien beruhende direkte Methode zur Beherrschung des Strahlungsproblems, bei welcher der Vergleich mit dem akustischen keine Rolle mehr spielt. In der Tat ist ein solcher Vergleich, wie sich herausstellt, nicht der Sache entsprechend, und ein zu II analoger Satz besteht, wenigstens allgemein, *nicht,* wenn man die Randbedingungen 2) durch diejenigen ersetzt, welchen in Wahrheit die Amplitude $\mathfrak{M}$ der magnetischen Feldstärke genügt, nämlich:

2_*) $\mathfrak{M}$ tangential, curl $\mathfrak{M}$ normal an der Begrenzung.

Immerhin läßt sich durch eine Art Kontinuitätsmethode erweisen, daß für einen *konvexen* Bereich J das Analogon zu Satz II dennoch gültig bleibt: *Für einen konvexen Hohlraum besitzt* 2_*) *in der Tat unterhalb einer beliebigen Grenze höchstens dreimal soviel Eigenwerte wie das akustische Problem.* Darauf gehen wir in § 4 ein. In § 5 füge ich einige Betrachtungen hinzu über die Genauigkeit, mit der die in den bisherigen Noten bewiesenen asymptotischen Eigenwertsgesetze gültig sind, und in § 6 endlich handle ich kurz von der Anwendung der dargelegten Schlußweise auf die allgemeine (einem inhomogenen Medium entsprechende) sich selbst adjungierte Differentialgleichung.

Wir werden bei der Aufgabe 1_*), die wir nun zunächst angreifen, die dritte Randbedingung in der Form div $\mathfrak{E} = 0$ beibehalten. Will man sie aber durch eine solche ersetzen, in der nur die Randwerte von $\mathfrak{E}$ und

seiner normalen Ableitung vorkommen, so wird man — ich folge hier der freundlichen Mitteilung von Herrn *Levi-Civita* — so schließen müssen. Trägt man in allen Punkten eines Oberflächenelementes do in Richtung der inneren Normale die unendlich kleine konstante Höhe ε ab, so erfüllen diese Strecken ein über do stehendes Volumelement dp $(= \varepsilon do)$ und ihre Endpunkte ein Flächenelement do_ε, für welches bei Beschränkung auf die erste Potenz von ε die Formel gilt:

$$\frac{do_\varepsilon}{do} = 1 - K\varepsilon + \cdots;$$

K bedeutet die doppelte mittlere Krümmung der Oberfläche an der Stelle do. Der Gesamtfluß durch die das Volumelement dp begrenzende Fläche beträgt, wenn wir beachten, daß $\mathfrak{E}$ senkrecht zur Oberfläche steht, und von Gliedern absehen, die von höherer Ordnung unendlich klein sind als das Volumen dp:

$$E_n(0)\,do - E_n(\varepsilon)\,do_\varepsilon,$$

wo die Argumente $0, \varepsilon$ auf die Raumstellen hinweisen, an denen sich do, bzw. do_ε befinden. Daß dieser Gesamtfluß $= 0$ sei, fordert die Randbedingung $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$:

$$|E_n(0) - E_n(\varepsilon)|\,do_\varepsilon + E_n(0)(do - do_\varepsilon) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist:

$$\Big(-\frac{\partial E_n}{\partial n} + KE_n\Big)dp.$$

Die Randbedingung $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ können wir demnach mit Rücksicht darauf, daß $\mathfrak{E}$ am Rande normal steht, durch die Forderung

$$\text{Normalkomponente von } \Big(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n} - K\mathfrak{E}\Big) \text{ gleich } 0$$

ersetzen*).

Wie die *Green*sche Formel (1.) dadurch zustande kommt, daß man in dem *Gauß*schen Satz

---

*) Man könnte noch sagen, daß, wenn die Oberfläche ein von ebenen Facetten gebildetes Polyeder ist, „$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}$ tangential“ nach wie vor die für das Hohlraumproblem maßgebende Randbedingung bleibt. Aber obwohl der früher stets benutzte *Jeans*sche Würfel ein solches Polyeder ist, bietet doch die allgemeine mathematische Behandlung unserer Aufgabe für den Fall, daß die begrenzende Oberfläche Kanten besitzt, die größten Schwierigkeiten.

$$\int_J \operatorname{div} \mathfrak{w}\, dp = -\int_{\mathfrak{O}} w_n\, do$$

$\mathfrak{w} = u \cdot \operatorname{grad} v$ setzt, *so gelangt man zu der Gleichung* (2.), *indem man*

$$\mathfrak{w} = [\mathfrak{u}, \operatorname{curl} \mathfrak{v}] + \mathfrak{u} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

nimmt. Vertauscht man in (2.) $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{v}$ und subtrahiert die so entstehende Gleichung von (2.), so bekommt man:

$$(3.)\quad \int_J (\mathfrak{u}\,\Delta\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\,\Delta\mathfrak{u})\, dp = \int_{\mathfrak{O}} \left\{ \begin{matrix} -[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \operatorname{curl} \mathfrak{v} - u_n \operatorname{div} \mathfrak{v} \\ +[\mathfrak{u}, \mathfrak{v}] \operatorname{curl} \mathfrak{u} + v_n \operatorname{div} \mathfrak{u} \end{matrix} \right\} do.^*)$$

---

*) Andrerseits läßt sich das gleiche Raumintegral gemäß der gewöhnlichen *Green*schen Formel in

$$-\int_{\mathfrak{O}} \left(\mathfrak{u} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial n} - \mathfrak{v} \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} \right) do$$

verwandeln. Daß dieses Oberflächenintegral mit dem im Haupttext übereinstimmt, geht aus der Identität

$$\left. \begin{matrix} [\mathfrak{u}, \operatorname{curl} \mathfrak{v}]_n + u_n \operatorname{div} \mathfrak{v} \\ -[\mathfrak{v}, \operatorname{curl} \mathfrak{u}]_n - v_n \operatorname{div} \mathfrak{u} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} \mathfrak{u} \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial n} \\ -\mathfrak{v} \dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} \end{matrix} \right\} + \operatorname{curl}_n [\mathfrak{u}, \mathfrak{v}]$$

hervor; denn infolge des *Stokes*schen Satzes ist $\int_{\mathfrak{O}} \operatorname{curl}_n [\mathfrak{u}, \mathfrak{v}]\, do = 0$. — Die für die mathematische Physik wesentliche Definition von Δv liegt nicht in der Gleichung

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

sondern: für ein skalares oder vektorielles, stetig differenzierbares Feld v ist Δv diejenige stetige Funktion (falls sie existiert), welche für jedes Raumstück J die Gleichung

$$\int_J \Delta v \cdot dp = -\int_{\mathfrak{O}} \frac{\partial v}{\partial n}\, do$$

erfüllt. Bei dieser Erklärung gilt beispielsweise für das *Newton*sche Potential

$$v(p) = \int \frac{1}{r(pp')} f(p')\, dp' \quad (r = \text{Entfernung}),$$

wie man sofort sieht, *stets* die *Poisson*sche Gleichung $\Delta v = -4\pi f$, wenn nur f stetig ist, während bei Zugrundelegung der gewöhnlichen Definition von Δv hierzu bekanntlich weitere Voraussetzungen über die Dichtigkeitsfunktion f nötig sind. Es ist daher wichtig zu bemerken, daß die Grundgleichungen (1.) und (2.) auch bei der eben formulierten allgemeineren Erklärung des Operators Δ (die keine zweimalige Differenzierbarkeit voraussetzt) ihre Gültigkeit behalten. Der Beweis dafür ist nicht schwierig, muß aber natürlich auf einem anderen Wege erbracht werden, als es sonst üblich ist.

§ 2.

Daß die Randwertaufgabe 1_*) keine negativen Eigenwerte besitzt, ist eine unmittelbare Folgerung aus (2.). Ist nämlich $(\lambda, \mathfrak{E})$ eine den Bedingungen 1_*) genügende Lösung von

$$\Delta \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{E} = 0,$$

so erhalten wir aus (2.), wenn wir $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} = \mathfrak{E}$ setzen,

$$\int_J \{(\operatorname{curl} \mathfrak{E})^2 + (\operatorname{div} \mathfrak{E})^2 - \lambda \mathfrak{E}^2\}\, dp = 0^*),$$

was mit $\lambda < 0$ (außer wenn $\mathfrak{E} \equiv 0$) unverträglich ist. Wie steht es mit $\lambda = 0$; gibt es in J reguläre Potentialvektoren $\mathfrak{e}$, die den Randbedingungen 1_*) Genüge leisten? Dies ist nach der gleichen Formel nur möglich, wenn

$$\operatorname{curl} \mathfrak{e} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0 \text{ identisch in } J$$
und $\mathfrak{e}$ normal an der Begrenzung.

Ein Vektor $\mathfrak{e}$ mit diesen Eigenschaften stellt ein *elektrostatisches Feld* im Hohlraum J dar. Da nach der ersten Gleichung dasselbe wirbelfrei ist, verschwindet das über eine beliebige geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ erstreckte Linienintegral von $\mathfrak{e}$ jedenfalls dann (nach dem *Stokes*schen Satz), wenn diese Kurve die vollständige Begrenzung eines ganz in J liegenden Flächenstückes ist. Aber auch wenn das nicht der Fall ist (und es braucht nicht der Fall zu sein, wenn z. B. J das Innere eines Torus ist), wird man zu $\mathfrak{C}$ immer endlichviele auf der Begrenzung von J gelegene geschlossene Kurven $\mathfrak{c}$ hinzufügen können, so daß das Kurvensystem $\mathfrak{C} + \mathfrak{c}$ die volle Berandung eines in J liegenden Flächenstückes abgibt. Man hat nur nötig, für die $\mathfrak{c}$ diejenigen Kurven zu nehmen, in denen ein beliebiges im Raum gelegenes, von $\mathfrak{C}$ berandetes Flächenstück die Begrenzung von J schneidet. Weil die tangentialen Komponenten von $\mathfrak{e}$ auf $\mathfrak{D}$ aber gleich Null sind, verschwinden die Linienintegrale von $\mathfrak{e}$ über die Kurven $\mathfrak{c}$. Es bleibt also von dem Linienintegral über die gesamte Berandung $\mathfrak{C} + \mathfrak{c}$ nur das über die willkürliche Kurve $\mathfrak{C}$ erstreckte Integral zurück, und dieses muß somit wegen $\operatorname{curl} \mathfrak{e} = 0$ stets den Wert Null haben. Es ist dadurch allgemein erwiesen, daß sich $\mathfrak{e}$ aus einem eindeutigen Potential φ ableitet:

---

*) Diese Gleichung besagt, wenn man sie auf eine elektromagnetische Eigenschwingung des Hohlraums anwendet (div $\mathfrak{E} = 0$ in J), daß der zeitliche Mittelwert der elektrischen Gesamtenergie (während einer vollen Schwingung) mit dem der magnetischen Gesamtenergie übereinstimmt.

$\mathfrak{e} = \operatorname{grad} \varphi$, $\Delta \varphi = 0$ in J,
$\varphi =$ const. auf jeder einzelnen zur Begrenzung von J gehörigen geschlossenen Fläche.

Wenn J nur von einer Fläche begrenzt wird, geht daraus hervor, daß das elektrostatische Problem keine Lösung besitzt (außer $\mathfrak{e}$ identisch gleich 0); besteht hingegen $\mathfrak{O}$ aus $h+1$ getrennten Flächen, so besitzt jenes Problem genau h linear unabhängige Lösungen, da der konstante Wert von φ auf jeder der $h+1$ Flächen beliebig vorgeschrieben werden kann und sich das zugehörige φ dann jedesmal durch Lösung der gewöhnlichen ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie ergibt. Wir setzen hier zunächst den ersten Fall voraus, indem wir uns vorbehalten, im nächsten Paragraphen die Modifikationen zu besprechen, welche die Lösbarkeit des elektrostatischen Problems bei einem von mehreren gesonderten Flächen begrenzten Hohlraum im Gefolge hat.

Um die Randwertaufgabe 1_*) auf eine Integralgleichung zurückzuführen, haben wir den zugehörigen *Greenschen Tensor*

$$\Gamma = \Gamma(pp') = \begin{Vmatrix} G_{xx}, & G_{xy}, & G_{xz} \\ G_{yx}, & G_{yy}, & G_{yz} \\ G_{zx}, & G_{zy}, & G_{zz} \end{Vmatrix}$$

zu konstruieren, der das inhomogene Problem

$$\Delta \mathfrak{E} = -4\pi \mathfrak{F} \tag{4.}$$

($\mathfrak{F}$ ein in J gegebenes stetiges Vektorfeld) unter den Randbedingungen 1_*) in der Form

$$\mathfrak{E}(p) = \int_J \Gamma(pp') \mathfrak{F}(p')\, dp' \tag{5.}$$

zu lösen gestattet. Dabei ist die Multiplikation $\Gamma \mathfrak{F}$ im Sinne der Matrizenrechnung zu verstehen, indem man den Vektor $\mathfrak{F}$ als eine Vertikalspalte schreibt. Bei der Bildung von $\mathfrak{F}(p)\,\Gamma(pp')$ wäre $\mathfrak{F}$ hingegen als Horizontalreihe zu betrachten. Ein als Vertikalspalte geschriebener Vektor $\mathfrak{a}$ liefert durch Multiplikation mit einem als Horizontalreihe geschriebenen Vektor $\mathfrak{b}$ nach den Regeln der Matrizenrechnung eine 3×3-reihige Matrix, die ich mit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ bezeichne.

Zur Berechnung von Γ bilde ich zunächst aus der gewöhnlichen, zum dreidimensionalen Membranproblem gehörigen *Green*schen Funktion G den Tensor

$$\Gamma_0 = \begin{Vmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{Vmatrix}$$

und setze

$$\Gamma = \Gamma_0 + \mathsf{A}.$$

Die drei Vertikalspalten von A betrachte ich als Vektoren $\mathfrak{A}_x(pp')$, $\mathfrak{A}_y(pp')$, $\mathfrak{A}_z(pp')$. Der Quellpunkt p' sei fest, und p werde als das veränderliche Argument gedacht. Dann müssen diese drei Vektoren, für $\mathfrak{u}$ gesetzt, die folgenden Eigenschaften besitzen:

(6.) $\Delta\mathfrak{u} = 0$ in J; $\mathfrak{u}$ normal und $\operatorname{div}\mathfrak{u} = f(o)$ an der Begrenzung $\mathfrak{O}$. Dabei ist $f(o)$ bekannt, nämlich bzw.

$$(7.)\qquad \begin{cases} = f_x(op') = -X(o)\dfrac{\partial G}{\partial n_o}(op'), \\ = f_y(op') = -Y(o)\dfrac{\partial G}{\partial n_o}(op'), \\ = f_z(op') = -Z(o)\dfrac{\partial G}{\partial n_o}(op'). \end{cases}$$

Die Lösung der Randwertaufgabe (6.) aus der Potentialtheorie für die erwähnten drei speziellen Funktionen $f(o)$ liefert uns also den gesuchten *Green*schen Tensor. Setzen wir in der Gleichung (3.) für $\mathfrak{u}$ einen der drei Vertikalvektoren, aus denen $\Gamma(pp_1)$ besteht, für $\mathfrak{v}$ einen der drei Vertikalvektoren $\Gamma(pp_2)$, wobei wir die Quellpunkte p_1, p_2 zunächst mittels kleiner Kugeln aus J ausschließen müssen, so ergibt sich die *Symmetrie* von Γ, d. h. das Gesetz

$$G_{xx}(p_1p_2) = G_{xx}(p_2p_1),\ G_{yy}(p_1p_2) = G_{yy}(p_2p_1),\ G_{zz}(p_1p_2) = G_{zz}(p_2p_1);$$
$$G_{xy}(p_1p_2) = G_{yx}(p_2p_1),\ G_{yz}(p_1p_2) = G_{zy}(p_1p_2),\ G_{zx}(p_1p_2) = G_{xz}(p_1p_2).$$

Man kann auch umgekehrt, wenn der *Green*sche Tensor Γ bekannt ist, mit seiner Hülfe die Randwertaufgabe (6.), in der $f(o)$ jetzt eine beliebige auf $\mathfrak{O}$ gegebene stetige Funktion bedeutet, lösen. Sind $\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z$ die Vertikalvektoren von Γ, so können wir setzen:

$$\mathfrak{G}_x(op') = \mathfrak{n}(o)\cdot g_x(op'), \dots .$$

Die drei Skalare g_x, g_y, g_z betrachten wir als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{g}$:

$$\Gamma(op') = \mathfrak{n}(o)\times\mathfrak{g}(op').$$

Wenden wir (3.) in der Weise an, daß wir für $\mathfrak{u}$ die Lösung von (6.) setzen, für $\mathfrak{v}$ aber einen der drei Vektoren $\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z$ (p' ist zunächst durch eine kleine Kugel aus dem Integrationsgebiet J auszuschließen), so ergibt sich:

$$(8.) \qquad -4\pi \mathfrak{u}(p) = \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{g}(op) f(o)\, do$$

als Lösung von (6).

Um aber die Lösung dieser Aufgabe ohne Benutzung des Tensors Γ (zu dessen Konstruktion sie ja erst dienen soll) zu bewerkstelligen, mache ich den gleichen Ansatz wie in A, S. 473, verstehe also unter

$$(9.) \qquad \mathfrak{u} = P(\mathfrak{t}, t)$$

zunächst allgemein dasjenige Vektorpotential, das durch eine über die Begrenzung von $\mathfrak{O}$ verteilte tangential gerichtete Doppelbelegung vom Momente $\mathfrak{t}(o)$ $\{\mathfrak{u}(o)\cdot\mathfrak{t}(o) = 0\}$ zusammen mit einer normal gerichteten einfachen Belegung von der Stärke $\mathfrak{u}(o)\cdot t(o)$ erzeugt wird. $t(o)$ und $\mathfrak{t}(o)$ sollen dann nachher so bestimmt werden, daß den Forderungen der zu lösenden Aufgabe Genüge geschieht.

Für den Ansatz (9.) ist dieses wesentlich: $P(\mathfrak{t}, t)$ kann nur dann in ganz J identisch gleich 0 sein, wenn die erzeugenden Belegungen t und $\mathfrak{t}$ selber identisch verschwinden. (9.) ist nämlich nicht nur in J, sondern auch im Außenraum $\bar{J}$ ein regulärer Potentialvektor, und es ist daher

$$(10.) \qquad \iiint_{\bar{J}} \left(\left|\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\right|^2 \right) dx\, dy\, dz = \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{u} \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n}\, do,$$

wo in dem Oberflächenintegral rechts natürlich die auf der Außenseite der Oberfläche herrschenden Werte von $\mathfrak{u}$, $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n}$ zu nehmen sind. Man beachte bei Herleitung dieser Identität, daß das Integral von $\mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n}$ über die Oberfläche einer Kugel von unendlich großem Radius unendlich klein (von der ersten Ordnung) ist. Die Normalkomponente von $\mathfrak{u}$ und die Tangentialkomponenten von $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n}$ durchsetzen die Oberfläche von J stetig. Ist also im Innern J identisch $\mathfrak{u} = 0$, so sind diese Komponenten auch an der Außenseite von $\mathfrak{O}$ gleich Null; es verschwindet infolgedessen das Oberflächenintegral in (10.), und daher muß in $\bar{J}$: $\mathfrak{u} = \text{const.} = \mathfrak{c}$ sein, und dann natürlich, da ein konstanter Vektor nicht auf allen Normalen von $\mathfrak{O}$ senkrecht stehen kann, $\mathfrak{u} = 0$. Also sind auch die Sprungfunktionen $\mathfrak{t}, t = 0$.

Die Forderung, daß (9.) an der inneren Seite von $\mathfrak{O}$ den Bedingungen (6.) genügen soll, setzt sich in ein System Σ von vier Integral-

gleichungen für $t(o)$ und die drei Komponenten von $\mathfrak{t}(o)$ um, auf das die *Fredholm*sche Theorie angewendet werden kann. Die ersten drei dieser Gleichungen lauten genau so wie A, S. 473, Formel $(27_{1,2,3})$; die vierte, die durch das Auftreten hochsingulärer Kerne am meisten Schwierigkeiten bereitet, ist ein wenig zu modifizieren, da die Bedingung

$$\text{Normalkomponente von } \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} \text{ gleich } f(o)$$

jetzt durch

$$\text{Normalkomponente von } \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} - K\mathfrak{u} \text{ gleich } f(o)$$

zu ersetzen ist. Das zugehörige homogene System Σ^0 von Integralgleichungen — das aus Σ entsteht, wenn man $f(o) = 0$ setzt — hat keine Lösung; denn eine nichtverschwindende Lösung $t, \mathfrak{t}$ von Σ^0 würde in dem Potential $\mathfrak{u} = P(\mathfrak{t}, t)$ ein in J nicht identisch verschwindendes elektrostatisches Feld liefern, und ein solches ist nicht vorhanden, da wir J als von einer einzigen Oberfläche begrenzt voraussetzten. Mithin ist das inhomogene System Σ stets lösbar, wie auch die stetige Funktion $f(o)$ vorgegeben sein mag.

Damit ist die Konstruktion des Tensors Γ vollendet. Wie in A, S. 478 ergibt sich die Abschätzung*)

$$(11.) \qquad |\mathsf{A}(pp')| \leqq \frac{\text{Const.}}{\mathsf{R}(pp')},$$

in der $\mathsf{R}(pp')$ das Minimum von $r(po) + r(p'o)$ [r = Entfernung] bedeutet, das zustande kommt, wenn o die Oberfläche $\mathfrak{O}$ durchläuft (also den Lichtweg von p nach p' bei einmaliger Reflexion an $\mathfrak{O}$). Wir schließen daraus:

$$(12.) \qquad |\mathsf{A}(pp')| \leqq \frac{\text{Const.}}{r(pp')}, \quad |\Gamma(pp')| \leqq \frac{\text{Const.}}{r(pp')}.$$

Diese Abschätzungen gewährleisten die Anwendbarkeit der *Hilbert*schen Theorie auf den symmetrischen Kern Γ, der demnach diskrete Eigenwerte σ_i besitzt.

Um den Beweis von a) [S. 179] *zu erbringen*, hat man zu zeigen, daß alle Eigenwerte von A positiv sind. α sei ein solcher, der zu dem Eigenvektor $\mathfrak{u}$ gehört:

$$(13.) \qquad \mathfrak{u}(p) = \alpha \int_J \mathsf{A}(pp')\,\mathfrak{u}(p')\,dp'.$$

*) Unter dem absoluten Betrag $|\mathsf{A}|$ eines Tensors A verstehen wir die Wurzel aus der Quadratsumme seiner neun Komponenten.

Dann ist $\mathfrak{u}$ im Innern J ein regulärer Potentialvektor, der an der Begrenzung normale Richtung besitzt. Bezeichnen wir den an der Oberfläche herrschenden Wert seiner Divergenz mit $f(o)$, so gilt die Gleichung (8.). Andrerseits folgt aus (13.), wenn wir p in den Oberflächenpunkt o rücken lassen und beachten, daß $\Gamma_0(op') = 0$ ist:

$$u_n(o) = \alpha \int_J \mathfrak{g}(op)\,\mathfrak{u}(p)\,dp. \tag{14.}$$

Durch Vereinigung von (14.) und (8.) entsteht

$$-4\pi \cdot u_n(o) = \alpha \int_{\mathfrak{O}} gg(oo')f(o')\,do' \quad \left[gg(oo') = \int_J \mathfrak{g}(op)\,\mathfrak{g}(o'p)\,dp\right]. \tag{15.}$$

Setzen wir in der neuen *Green*schen Formel*) (2.) für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die jetzt mit $\mathfrak{u}$ bezeichnete Größe, so kommt

$$\int_J \{(\operatorname{curl}\mathfrak{u})^2 + (\operatorname{div}\mathfrak{u})^2\}\,dp = -\int_{\mathfrak{O}} f(o)\,u_n(o)\,do = \frac{\alpha}{4\pi}\iint_{\mathfrak{O}\mathfrak{O}} gg(oo')f(o)f(o')\,do\,do'. \tag{16.}$$

Aber aus (8.) geht hervor, daß

$$\int_J \mathfrak{u}^2\,dp = \frac{1}{16\pi^2}\iint_{\mathfrak{O}\mathfrak{O}} gg(oo')f(o)f(o')\,do\,do',$$

und damit ist gezeigt, daß α (das ja sicher $\neq 0$ ist), positiv sein muß.

§ 3.

Bevor wir zum Beweis des asymptotischen Gesetzes b) übergehen, geben wir zunächst *diejenigen Ergänzungen an, welche die bisherigen Darlegungen erfordern, falls J von mehreren getrennten Oberflächen begrenzt wird.* Alsdann bedeute $\mathfrak{c}(p)$ eine jede Lösung des elektrostatischen Problems. Die sämtlichen $\mathfrak{c}$ lassen sich durch lineare Kombination mittels konstanter Faktoren aus h von ihnen

$$\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_h$$

erzeugen, die wir so annehmen können, daß die Orthogonalitätsgleichungen:

$$\int_J \mathfrak{c}_i\,\mathfrak{c}_j\,dp = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots h)$$

bestehen.

Die inhomogene Aufgabe (4.) kann nur dann lösbar sein, wenn das vorgegebene Vektorfeld $\mathfrak{F}$ zu allen $\mathfrak{c}$ orthogonal ist:

$$\int_J \mathfrak{F}\mathfrak{c}\,dp = 0; \tag{17.}$$

---

*) In ihrer Verwendung liegt die entscheidende Änderung gegenüber den Überlegungen in C II, § 4, denen dieser Beweis sonst genau parallel läuft.

man erkennt dies, indem man in der Formel (3.) $\mathfrak{u} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{e}$ setzt. Andrerseits ist die Lösung $\mathfrak{E}$ niemals eindeutig, denn mit $\mathfrak{E}$ genügt auch jedes Feld $\mathfrak{E} + \mathfrak{e}$ den Anforderungen der Aufgabe. Ich kann aber die Lösung dadurch zu einer eindeutigen machen, daß ich von ihr verlange, sie solle zu allen $\mathfrak{e}$ orthogonal sein:

$$\int_J \mathfrak{E}\mathfrak{e}\, dp = 0. \tag{18}$$

Unter der Voraussetzung (17.) soll nun die durch (18.) normierte Lösung von (4.) wieder mit Hülfe eines noch zu konstruierenden *Green*schen Tensors Γ in der Form (5.) dargestellt werden.

Dazu müssen wir zunächst Γ_0 unter Wahrung seiner Symmetrie zu allen $\mathfrak{e}$ orthogonal machen. Das geschieht (vgl. C II, S. 166), indem wir Γ_0 durch

$$\Gamma_0^* = \Gamma_0 - \sum_{i=1}^{h} \int_J \Gamma_0(pp'')\, \mathfrak{e}_i(p'')\, dp'' \times \mathfrak{e}_i(p') - \sum_{i=1}^{h} \mathfrak{e}_i(p) \times \int_J \mathfrak{e}_i(p'')\, \Gamma_0(p''p')\, dp'' + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h} \mathfrak{e}_i(p) \times \mathfrak{e}_j(p') \int_J\int_J \mathfrak{e}_i(p)\, \Gamma_0(pp')\, \mathfrak{e}_j(p')\, dp\, dp'$$

ersetzen. Als Funktion von p genügt dieser Tensor Γ_0^* der Gleichung:

$$\Delta\Gamma_0^* = 4\pi\{\mathfrak{e}_1(p) \times \mathfrak{e}_1(p') + \mathfrak{e}_2(p) \times \mathfrak{e}_2(p') + \cdots + \mathfrak{e}_h(p) \times \mathfrak{e}_h(p')\}. \tag{19.}$$

Wenn wir $\Gamma = \Gamma_0^* + \mathsf{A}$ setzen, so erhält man die drei Vertikalvektoren, aus denen A besteht, wiederum durch Lösung der Randwertaufgabe (6.) der Potentialtheorie. Nur haben für $f(o)$ der Reihe nach drei Funktionen $f_x(op')$, $f_y(op')$, $f_z(op')$ einzutreten, deren analytischer Ausdruck ein etwas anderer ist als (7.); z. B. wird $-f_x(op')$ gleich der an der Oberfläche herrschenden, nach p genommenen Divergenz des in der ersten Spalte von Γ_0^* stehenden Vektors. Und ferner ist die Lösung von (6.) durch die Orthogonalitätsgleichungen

$$\int_J \mathfrak{u}\mathfrak{e}\, dp = 0 \tag{20.}$$

zu normieren. Aber wenn jene Aufgabe überhaupt eine Lösung $\mathfrak{u}$ besitzt, so hat sie auch immer eine solche, und zwar nur eine, die außerdem noch (20.) erfüllt; denn mit $\mathfrak{u}$ ist auch immer $\mathfrak{u} + \mathfrak{e}$ eine Lösung.

Damit (6.) lösbar ist, kann $f(o)$ nicht völlig beliebig vorgegeben werden. Setzen wir nämlich in (2.) für $\mathfrak{u}$ die jetzt mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Lösung von (6.), für $\mathfrak{v}$ ein beliebiges elektrostatisches Feld $\mathfrak{e}$, so kommt

$$(21.) \qquad \int_{\mathfrak{d}} e_n(o)\, f(o)\, do = 0.$$

Das sind h linear unabhängige Bedingungen für $f(o)$; denn $e_n(o) = |\mathfrak{e}(o)|$ kann nicht identisch verschwinden, ohne daß der Potentialvektor $\mathfrak{e}(p)$ selber identisch gleich 0 wird. Setzen wir in (3.) für $\mathfrak{u}$ einen der drei Vertikalvektoren $\mathfrak{G}^*_{0x}, \ldots$, aus denen $\Gamma^*_0(pp')$ besteht, und $\mathfrak{v} = \mathfrak{e}(p)$, so müssen wir den Unstetigkeitspunkt p' zunächst aus dem Integrationsfelde J durch eine kleine Kugel ausschließen; dann ergibt sich das Resultat, daß jede der drei Funktionen

$$f(o) = f_x(op), f_y(op'), f_z(op')$$

den zur Lösbarkeit erforderlichen Relationen (21.) genügt. Können wir also unter der Voraussetzung (21.) die Aufgabe (6*.) lösen: ein den Bedingungen (6.), (20.) genügendes Feld $\mathfrak{u}$ zu finden, so sind wir imstande, den Tensor A und damit Γ zu berechnen. Γ wird derselben Gleichung (19.) genügen wie Γ^*_0, und die Symmetrie von Γ ergibt sich dann in der gleichen Weise wie im vorigen Paragraphen, indem wir beachten, daß

$$\int_J \mathfrak{e}(p)\, \Gamma(pp')\, dp = 0$$

ist. Die Lösung der allgemeinen Aufgabe (6*.) läßt sich mit Hülfe des Tensors Γ durch die Gleichung (8.) bei ungeänderter Bedeutung von $\mathfrak{g}$ vollziehen.

Wir verwenden wieder den Ansatz $\mathfrak{u} = P(\mathfrak{t}, t)$ und erhalten das gleiche System Σ von Integralgleichungen wie oben. Aber Σ ist jetzt gewiß nur dann lösbar, wenn $f(o)$ die h linear unabhängigen Bedingungen (21.) erfüllt, und infolgedessen muß nach der Theorie der Integralgleichungen das zugehörige homogene System Σ^0 mindestens h linear unabhängige Lösungen besitzen; und wenn Σ^0 nicht mehr als h linear unabhängige Lösungen zuläßt, sind die Gleichungen (21.) für die Auflösbarkeit von Σ auch *hinreichend.* Daß aber Σ^0 wirklich nicht mehr als h linear unabhängige Lösungen besitzt, geht daraus hervor, daß jede Lösung $\mathfrak{t}, t$ von Σ^0 in $\mathfrak{u} = P(\mathfrak{t}, t)$ eine Lösung des elektrostatischen Problems ergibt, und da $P(\mathfrak{t}, t)$ nur dann in J identisch verschwindet, wenn die erzeugenden Belegungen gleich 0 sind, entsprechen linear unabhängigen Lösungen von Σ^0 immer linear unabhängige Lösungen des elektrostatischen Problems. Damit ist auch dieser Punkt erledigt und die Konstruktion von Γ nunmehr beendet.

An den Schlüssen, welche zu der Einsicht führen, daß alle Eigenwerte α von A positiv sind, ändert sich nur dies eine, daß die Gleichung (14.) zu ersetzen ist durch

$$u_n(o) = \alpha \int_J \mathfrak{g}(op)\,\mathfrak{u}(p)\,dp + e_n(o),$$

wo $e_n(o)$ die an der Begrenzung herrschende Normalkomponente eines gewissen elektrostatischen Feldes $\mathfrak{e}$ ist. Das Zusatzglied $e_n(o)$ ist auch in Gleichung (15.) noch mitzuführen, aber in (16.) fällt es wieder fort, da $\int_{\mathfrak{O}} f(o)\,e_n(o)\,do = 0$ ist.

Γ hat demnach unterhalb einer beliebigen Grenze L mindestens ebenso viele Eigenwerte wie Γ_0^*. Der Übergang von Γ_0^* zu Γ_0 erhöht die Anzahl der unterhalb L gelegenen Eigenwerte um höchstens h (vgl. C II, § 1); andrerseits hat man den Eigenwerten von Γ noch den h-fachen Eigenwert 0 hinzuzufügen, um das volle System der Eigenwerte des Problems 1_*) zu gewinnen. Es bleibt also auch dann, wenn J von mehreren getrennten Spiegelflächen begrenzt ist, dabei, daß dieses Problem unterhalb L mindestens dreimal soviel Eigenwerte aufweist, wie das dreidimensionale Membranproblem.

Jetzt fahren wir an dem Punkte fort, wo wir am Schlusse von § 2 stehen geblieben waren. Sind α_i die der Größe nach geordneten Eigenwerte und $\mathfrak{u}_i$ die normierten Eigenfunktionen*) von A, so ist die zu

$$\mathsf{A}(pp') - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{u}_i(p) \times \mathfrak{u}_i(p')}{\alpha_i}$$

gehörige quadratische Integralform positiv-definit (denn die sämtlichen Eigenwerte $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$ der hingeschriebenen Kernmatrix sind > 0), und daher müssen die drei in der Hauptdiagonale dieser Matrix stehenden Funktionen für $p = p'$ selbst $\geqq 0$ sein:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{u}_i^2(p)}{\alpha_i} \leqq A_{xx}(pp) + A_{yy}(pp) + A_{zz}(pp). \tag{22.}$$

Daneben gilt die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{u}_i^2(p)}{\alpha_i^2} \leqq \int_J |\mathsf{A}(pp')|^2 dp'. \tag{23.}$$

Bedeutet $r(p)$ die kürzeste Entfernung des Punktes p von der Oberfläche $\mathfrak{O}$,

*) Die normierende Bedingung lautet $\int_J \mathfrak{u}_i^2\,dp = 1$.

und zerlegen wir J, indem wir unter ε eine kleine positive Konstante (< 1) verstehen, in die beiden Teile

$$J_\varepsilon \quad [r(p) > \varepsilon] \text{ und } J - J_\varepsilon \quad [r(p) \leqq \varepsilon],$$

deren Punkte p durch die beigeschriebenen Bedingungen charakterisiert werden, so folgt aus den Abschätzungen (12.), wenn wir (22.) über J_ε und (23.) über die Schale $J - J_\varepsilon$ integrieren:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \int_{J_\varepsilon} u_i^2 \, dp \leqq \text{Const.} \int_{J_\varepsilon} \frac{dp}{r(p)} \leqq \text{Const.} \lg \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^2} \int_{J-J_\varepsilon} u_i^2 \, dp \leqq \text{Const.} \int_{J-J_\varepsilon} dp \leqq \text{Const.} \, \varepsilon .$$

Wir ersetzen rechts das Zeichen „Const." [= unabhängig von n und ε] durch $\frac{1}{2} C$. A fortiori gilt:

$$(24.) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{J_\varepsilon} u_i^2 \, dp \leqq \dfrac{C}{2} \lg \dfrac{1}{\varepsilon}, \\ \dfrac{1}{\alpha_n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{J-J_\varepsilon} u_i^2 \, dp \leqq \dfrac{C}{2} \cdot \varepsilon \alpha_n . \end{cases}$$

Addition liefert die Beziehung:

$$\frac{n}{\alpha_n} \leqq \frac{C}{2} \left(\lg \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \alpha_n \right).$$

Die beste Ausnutzung dieser Ungleichung erhalten wir, wenn wir

$$\varepsilon = \frac{\lg \alpha_n}{\alpha_n}$$

nehmen; dann folgt (sobald $\alpha_n > \mathrm{e}$)

$$\frac{n}{\alpha_n} \leqq C \lg \alpha_n$$

und daraus (sobald $n > \mathrm{e}^{1/C}$):

$$(25.) \qquad \alpha_n \geqq \frac{1}{C} \cdot \frac{n}{\lg n} .$$

Die reziproken Eigenwerte $\frac{1}{\alpha_n}$ konvergieren demnach wesentlich stärker gegen 0 als $n^{-2/3}$, und infolgedessen kann die Addition von A zu Γ_0 (bzw. Γ_0^*) an der asymptotischen Eigenwertverteilung des letzteren Kerns nichts ändern. —

Die wesentlichen Bestandteile des damit zu Ende geführten direkten Beweises des asymptotischen Spektralgesetzes der Hohlraumstrahlung sind

enthalten — wenn ich dies nochmals zusammenstellen darf — in C I, §§ 1—4, C II, § 1 und §§ 1—3 der gegenwärtigen Note.

§ 4.

Geht man bei der Behandlung des Strahlungsproblems statt von der elektrischen von der *magnetischen Feldstärke* aus, so hat man es mit der Aufgabe zu tun:

2_*) $\Delta \mathfrak{M} + \lambda \mathfrak{M} = 0$ in J; $\mathfrak{M}$ tangential, curl $\mathfrak{M}$ normal an der Begrenzung.

Ihre Eigenwerte λ bestehen erstens aus den Eigenwerten des eigentlichen Strahlungsproblems und enthalten zweitens als fremden Bestandteil noch die positiven Eigenwerte des akustischen Problems. 2_*) läßt sich analog wie die in § 2 durchgeführte Aufgabe behandeln. Was das *„magnetostatische" Problem* ($\lambda = 0$ oder)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{m} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{m} = 0 \text{ in } J; \quad \mathfrak{m}_n = 0 \text{ an der Begrenzung}$$

betrifft, so hängt dessen Lösbarkeit von den topologischen Zusammenhangsverhältnissen des Hohlraums ab. Ich nehme als Beispiel einen Torus. Wir schieben in den Torus eine Kreisplatte ein, deren Ebene durch den Mittelpunkt des Torus geht und deren Rand, um Singularitäten zu vermeiden, nicht auf, sondern außerhalb des Torus verläuft, und verstehen dann unter $\omega(p)$ denjenigen körperlichen Winkel, unter dem die Platte von einem beliebigen Punkt p des Raumes aus erscheint. $\omega(p)$ ist eine Potentialfunktion von p, die im ganzen Raume, der in der Kreisplatte aufgeschnitten zu denken ist, eindeutig ist, beim Durchsetzen der Platte aber den Sprung 4π erleidet. Wenn wir über die Begrenzung des durch die Kreisplatte zerschnittenen Torus integrieren, so ist

$$\int \frac{\partial \omega}{\partial n} do = 0.$$

Die von der rechten und linken Seite des im Torus gelegenen Teiles der Kreisscheibe herrührenden Beiträge zerstören sich, und es ist infolgedessen auch, wenn wir nur über die Oberfläche des Torus integrieren,

$$\int \frac{\partial \omega}{\partial n} do = 0.$$

Daher können wir mittels Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie eine im Innern J des Torus eindeutige, stetige Potentialfunktion ψ konstruieren, für die auf dem Torus

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial n}$$

ist. $\mathfrak{m} = \text{grad}\,(\omega - \psi)$ ist dann eine Lösung des magnetostatischen Problems, die nicht identisch verschwindet, da das längs der „Seele" des Torus erstreckte Linienintegral von $\mathfrak{m}$ gleich 4π ist. Aber es wird sogleich ersichtlich, daß dies bis auf einen konstanten Faktor auch die einzige Lösung ist, da jede geschlossene Kurve im Torus, welche die Kreisplatte nicht durchsetzt, die vollständige Begrenzung eines ganz im Torus belegenen Flächenstückes abgibt.

Wir wollen uns hier indes genauer nur mit dem Fall beschäftigen, wo J von einer einzigen konvexen Fläche begrenzt wird; in diesem Falle ist die Lösbarkeit des magnetostatischen Problems ausgeschlossen. In jedem Punkte o von $\mathfrak{O}$ konstruieren wir die beiden Krümmungslinien und bezeichnen mit $u'(o)$, $u''(o)$ allgemein die nach den Richtungen dieser beiden Krümmungslinien genommenen Komponenten eines im Innern und auf der Oberfläche von J definierten Vektorfeldes $\mathfrak{u}$. $\frac{1}{\varrho'}$, $\frac{1}{\varrho''}$ seien die Werte der zugehörigen Krümmungsradien. Die Randbedingungen 2_*) kann man in die Form setzen*):

$$(26.) \quad M_n = 0,\ \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial n}\right)' - \varrho' M' = 0,\ \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial n}\right)'' - \varrho'' M'' = 0.$$

Errichtet man nämlich in allen Punkten eines kleinen Stückes ds' der ersten Krümmungslinie die Flächennormalen und trägt auf ihnen nach innen zu die unendlich kleine konstante Länge ε ab, so entsteht ein Flächenstück df, und die Endpunkte der abgetragenen Strecken bilden ein neues Kurvenelement

$$ds'_\varepsilon = ds'(1 - \varepsilon\varrho' + \cdots).$$

Da $\mathfrak{M}$ an der Oberfläche tangential gerichtet ist, bestimmt sich das um den Rand von df erstreckte Linienintegral von $\mathfrak{M}$ bis auf Glieder, die von höherer Ordnung unendlich klein sind als df, zu

$$M'(0)ds' - M'(\varepsilon)ds'_\varepsilon = \{M'(0) - M'(\varepsilon)\}ds' + M'(\varepsilon)\{ds' - ds'_\varepsilon\} = \left\{\varrho' M' - \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial n}\right)'\right\}\varepsilon\, ds'.$$

Man hat dabei zu beachten, daß die längs einer Krümmungslinie errichteten Flächennormalen eine Developpable bilden; denn dieser Umstand bewirkt

*) In einem Nabelpunkt, in welchem die Richtung der Krümmungslinien unbestimmt wird, involvieren diese Gleichungen selber offenbar keine Unbestimmtheit.

es, daß der Winkel, den das Linienelement ds'_ε mit ds' bildet, bei festem ε und gegen 0 konvergierendem ds' gegen 0 geht. — Die Konvexität der Oberfläche hat die Ungleichungen

$$\varrho' \geqq 0, \quad \varrho'' \geqq 0$$

zur Folge.

Wir stellen uns jetzt, während ϑ eine Konstante zwischen 0 und 1 bedeutet, die Aufgabe:

$$\Delta \mathfrak{U} + \lambda \mathfrak{U} = 0 \text{ in } J, \text{ mit den Randbedingungen}$$

$$(27.) \qquad U_n = 0, \ \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}\right)' = \vartheta \varrho' U', \ \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}\right)'' = \vartheta \varrho'' U''.$$

Für $\vartheta = 0$ kommt das in § 1 mit 2) bezeichnete Problem heraus, von dem der Satz II gilt, für $\vartheta = 1$ haben wir das Strahlungsproblem 2_*) vor uns. Indem wir den Parameter ϑ von 0 bis 1 variieren, vollziehen wir einen stetigen Übergang von dem einen Problem zum anderen. Da für eine Lösung $(\lambda, \mathfrak{U})$ von (27.) gemäß der gewöhnlichen *Green*schen Formel die Gleichung

$$\int_J \left(\left|\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\right|^2 - \lambda \mathfrak{U}^2 \right) dp = -\int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{U} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} do$$

$$= -\vartheta \int_{\mathfrak{D}} (\varrho' U'^2 + \varrho'' U''^2) do$$

gilt, müssen alle Eigenwerte von (27.) positiv sein. Diese Eigenwerte λ^ϑ hängen ebenso wie die Eigenfunktionen $\mathfrak{U}_\vartheta$ (bei geeigneter Normierung) stetig von ϑ ab, wie sich ohne Mühe zeigen läßt, wenn man auf die Konstruktion des zugehörigen *Green*schen Tensors Γ_ϑ (von dem hier nicht weiter die Rede gewesen ist) zurückgreift. Wir setzen für ϑ irgend zwei Werte ϑ_1, ϑ_2 und wenden die *Green*sche Formel

$$\int_J (\mathfrak{U}_{\vartheta_1} \Delta \mathfrak{U}_{\vartheta_2} - \mathfrak{U}_{\vartheta_2} \Delta \mathfrak{U}_{\vartheta_1}) dp = -\int_{\mathfrak{D}} \left(\mathfrak{U}_{\vartheta_1} \frac{\partial \mathfrak{U}_{\vartheta_2}}{\partial n} - \mathfrak{U}_{\vartheta_2} \frac{\partial \mathfrak{U}_{\vartheta_1}}{\partial n} \right) do$$

an:

$$(\lambda_{\vartheta_1} - \lambda_{\vartheta_2}) \int_J \mathfrak{U}_{\vartheta_1} \mathfrak{U}_{\vartheta_2} dp = (\vartheta_1 - \vartheta_2) \int_{\mathfrak{D}} (\varrho' U'_{\vartheta_1} U'_{\vartheta_2} + \varrho'' U''_{\vartheta_1} U''_{\vartheta_2}) do.$$

Indem wir ϑ_2 gegen $\vartheta_1 = \vartheta$ konvergieren lassen, folgt:

$$\frac{d\lambda_\vartheta}{d\vartheta} \cdot \int_J |\mathfrak{U}_\vartheta|^2 dp = \int_{\mathfrak{D}} (\varrho' |U'_\vartheta|^2 + \varrho'' |U''_\vartheta|^2) do.$$

Wir sehen: Wenn ϑ von 0 bis 1 läuft, wachsen alle Eigenwerte von (27.); infolgedessen liegen unterhalb einer beliebigen Grenze nicht mehr Eigen-

werte von 2_*) als von 2), und somit ist die Anzahl der Eigenwerte von 2_*) höchstens gleich der dreifachen Anzahl der unter derselben Grenze liegenden Eigenwerte des akustischen Problems.

§ 5.

Um über *die Genauigkeit, mit der die von mir ermittelten asymptotischen Eigenwertsgesetze gültig sind*, Rechenschaft zu geben, spreche ich zunächst von dem (dreidimensionalen) *Membranproblem*:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } J, \quad u = 0 \text{ an der Oberfläche.}$$

Für seine Eigenwerte $\lambda = \varkappa_n$ ergab das einfache, in C I, § 4 benutzte Beweisverfahren die asymptotische Gleichung

$$\varkappa_n \backsim \left(\frac{6\pi^2 n}{J}\right)^{2/3}.$$

Die volle Ausnutzung jener Methode erlaubt festzustellen, daß *der prozentuale Fehler dieses Gesetzes höchstens von der Ordnung* $\frac{\lg n}{\sqrt[3]{n}}$ *ist*, d. h. es gilt eine Ungleichung

$$\left|\varkappa_n \left(\frac{J}{6\pi^2 n}\right)^{2/3} - 1\right| \leqq \text{Const.} \frac{\lg n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Da man sich an den einfachsten Beispielen, wie Würfel oder Kugel, sogleich überzeugt, daß dort der Fehler genau von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ist, kann dieses Ergebnis als durchaus befriedigend betrachtet werden. Ungünstiger stehen die Dinge bei dem *akustischen* und dem *Strahlungsproblem. Hier liefert meine jetzige Methode* bei voller Inanspruchnahme aller Abschätzungen *nur*

$$\left(\frac{\lg n}{\sqrt[3]{n}}\right)^{1/2}$$

als obere Grenze für die Größe des prozentualen Fehlers.

Membranproblem. Ausgangspunkt für den Beweis des asymptotischen Gesetzes war die Tatsache, daß im Innern eines der 8 Oktanten, in welche die 3 zueinander senkrechten Koordinatenebenen die um den Nullpunkt gelegte Kugel von dem (sehr großen) Radius R zerlegen, näherungsweise

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{6} R^3$$

Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) liegen. Der Fehler

ist dabei für alle R absolut kleiner als bR^2, wo b eine universelle numerisch angebbare Konstante ist. Die Anzahl der unterhalb einer Grenze L gelegenen Membraneigenwerte $\varkappa = \varkappa(W)$ eines Würfels W von der Kantenlänge l stimmt exakt überein mit der Anzahl dieser Gitterpunkte, wenn man $R = \frac{l\sqrt{L}}{\pi}$ nimmt, und ist also

$$= n(W) \backsim \frac{l^3}{6\pi^2} L^{3/2}; \quad \text{Fehler}^*) \; l^2 L.$$

Um den gegebenen Hohlraum J mittels Würfel auszuschöpfen, wenden wir das folgende Verfahren an: Ich beginne mit einem Würfelnetz von der Kantenlänge 1, das jedoch alsbald durch fortgesetzte Halbierung der Kanten immer weiter und weiter verfeinert werden soll. W_0 seien diejenigen Würfel des Netzes von der Kantenlänge 1, welche ganz innerhalb J liegen, und w_0 ihre Anzahl. Gehen wir durch Halbierung der Kante zu dem Würfelnetz von der Kantenlänge $\frac{1}{2}$ über, so zerfällt jeder Würfel W_0 in 8 innerhalb J gelegene Würfel des neuen Netzes; zu ihnen werden im allgemeinen noch eine Anzahl Würfel W_1 dieses feineren Netzes treten, die gleichfalls ganz innerhalb J liegen; von diesen seien w_1 vorhanden. Beim Übergang zum Netz von der Kantenlänge $\frac{1}{2^2}$ treten weitere w_2 Würfel W_2 hinzu, beim Übergang zur Kantenlänge $\frac{1}{2^3}$ dann w_3 Würfel W_3 usw. Die Würfel $W_0 + W_1 + W_2 + \cdots$ zusammen erfüllen schließlich einfach und lückenlos das ganze Innere des Raumes J. Brechen wir aber beim $(i-1)$-ten Schritt mit den Würfeln W_{i-1} ab, so bleibt ein Exhaustionsrest, dessen Volumen

$$\leqq \text{Const.} \frac{1}{2^{i-1}}$$

ist. In ihm haben höchstens

$$\text{Const.} \frac{1}{2^{i-1}} \cdot 2^{3i}$$

Würfel von der Kantenlänge $\frac{1}{2^i}$ Platz, und daher ist:

$$w_i \leqq \text{Const.}\, 2^{2i}. \tag{28.}$$

$n(W), n(J)$ seien die Anzahlen der zu einem Würfel W, bezw. zu J gehörigen Membraneigenwerte, welche unterhalb L liegen. Wir haben

*) Diese Schreibweise soll besagen: der Fehler ist $\leqq$ const. $l^2 L$, wo const. weder von l noch von L abhängt.

$$n(W_i) \backsim \frac{L^{3/2}}{6\pi^2 \cdot 2^{3i}}; \quad \text{Fehler } \frac{L}{2^{2i}}.$$

Summieren wir über alle Würfel W_i und dann auch noch über $i = 0, 1, 2, \ldots r$, so kommt

$$\sum_{i=0}^{r} \Sigma n(W_i) \backsim \sum_{i=0}^{r} \frac{w_i}{2^{3i}} \cdot \frac{L^{3/2}}{6\pi^2}; \quad \text{Fehler } \sum_{i=0}^{r} \frac{w_i}{2^{2i}} \cdot L.$$

Nach dem Haupttheorem von C I ist $n(J)$ mindestens gleich der hier auf der linken Seite stehenden Summe. Bedenken wir ferner, daß $\sum_{i=0}^{r} \frac{w_i}{2^{3i}}$ bis auf einen Exhaustionsrest, der $\leqq$ Const. $\frac{1}{2^r}$ ist, mit dem Volumen J übereinstimmt, und machen bei der Fehlerabschätzung von der Ungleichung (28.) Gebrauch, so stellt sich heraus, daß

$$n(J) \geqq \frac{J}{6\pi^2} L^{3/2} - C\left(\frac{L^{3/2}}{2^r} + rL\right) \qquad \{r \geqq 1\}$$

ist, wo C eine von L und r unabhängige Konstante bezeichnet. Die beste Ausnutzung dieser Ungleichung erhalten wir, wenn wir für r die größte ganze in $\frac{1}{2}\frac{\lg L}{\lg 2}$ enthaltene Zahl nehmen:

$$n(J) \geqq \frac{J}{6\pi^2} L^{3/2} - C'(L \cdot \lg L) \qquad \{L \geqq 2\}.$$

Damit ist die aufgestellte Behauptung über die Größe des Fehlers, soweit es sich für $n(J)$ um Abschätzung *nach unten* handelt, bewiesen. Um eine *obere* Grenze zu ermitteln, verfahren wir gemäß C I, § 4, so, daß wir einen Würfel W nehmen, der ganz J enthält, und nun die eben erhaltene Ungleichung auf $W - J$ anwenden. In Anbetracht der Beziehung

$$n(J) \leqq n(W) - n(W - J)$$

stellt sich alsdann die gleiche Fehlerbegrenzung auch bei Abschätzung von $n(J)$ nach oben heraus.

Nun zum *Strahlungsproblem!* Die Reihe derjenigen Zahlen, welche zustande kommt, wenn wir jeden der Membraneigenwerte $\varkappa_n(J)$ dreimal schreiben, heiße λ_n. In der Bezeichnung von § 3 haben wir für die näherungsweise Berechnung der Eigenwerte σ_n, die zu einem von $h+1$ Flächen begrenzten Hohlraum J gehören, die Ungleichungen:

$$\frac{1}{\sigma_{n+h}} \leqq \frac{1}{\lambda_{n-n_1+1}} + \frac{1}{\alpha_{n_1}}, \quad \frac{1}{\alpha_n} \leqq \frac{1}{C} \cdot \frac{\lg n}{n}$$

zur Verfügung. Verstehen wir unter n_1 die größte ganze in $n^{5/6}\sqrt{\lg n}$ ent-

haltene Zahl, so stimmt die Summe rechterhand in der ersten Ungleichung bis auf einen Fehler $\leqq$ Const. $\frac{\sqrt{\lg n}}{n^{5/6}}$ mit

$$B \cdot n^{-2/3} \qquad \left[B = \left(\frac{J}{2\pi^2}\right)^{2/3}\right]$$

überein:

$$\sigma_n \geqq \frac{1}{B} n^{2/3}\left[1 - \text{Const.} \frac{\sqrt{\lg n}}{\sqrt[6]{n}}\right].$$

Eine obere Grenze für σ_n ist gegeben durch

$$\sigma_n \leqq \lambda_n \leqq \frac{1}{B} n^{2/3}\left[1 + \text{Const.} \frac{\lg n}{\sqrt[3]{n}}\right].$$

Der Versuch, diese Abschätzungen wesentlich weiter zu treiben, etwa *neben dem ersten Gliede* $\frac{1}{B} n^{2/3}$ *noch das 2. Glied einer* vielleicht existierenden, *nach absteigenden Potenzen von n fortschreitenden „asymptotischen Reihe" zu ermitteln*, scheint gegenwärtig wenig aussichtsreich. Wenn J ein Würfel von der Kantenlänge 1 ist, (der Fall, der immer die Grundlage bildet) kann freilich aus neueren zahlentheoretischen Untersuchungen der Herren *Voronoï, Sierpiński, Landau**), bei denen sehr schwierige und subtile Hülfsmittel zur Verwendung kommen, das zweite Glied einer solchen asymptotischen Entwicklung entnommen werden; man bekommt hier für $\varkappa_n$ (um nur von dem leichteren Membranproblem zu sprechen)

$$\varkappa_n \backsim (6\pi^2 n)^{2/3} + \tfrac{3}{2}\pi \cdot (6\pi^2 n)^{1/3}$$

mit einer Abweichung $\leqq$ Const. $n^{1/6+\varepsilon}$ (ε irgendeine feste positive Zahl). Der genaue Fehler, ich meine die Differenz der rechten und linken Seite in der letzten asymptotischen Gleichung, ist wahrscheinlich eine zahlentheoretische Funktion von höchst unregelmäßigem Verhalten, die sich asymptotisch nicht mehr mit einer Potenz von n vergleichen läßt**). Man wird geneigt sein, die Schuld daran den Kanten und Ecken des Würfels zuzuschreiben und bei Räumen z. B., die von regulär-analytischen Flächen

---

*) *Voronoï*, dieses Journal Bd. 126 (1903), S. 241—282; *Sierpiński*, Prace matematyczno-fizyczne, Bd. 17 (1906), S. 77—118; *Landau*, Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl., Sitzung vom 18. Mai 1912.

**) Für Parallelepipede mit irrationalem Kantenverhältnis scheint bei dem heutigen Stande der Zahlentheorie sogar die Ermittlung des zweiten Gliedes schon nicht mehr möglich zu sein.

begrenzt sind, eine Fortsetzbarkeit der intendierten asymptotischen Reihe auf eine größere Anzahl von Gliedern vermuten. Aber da wir ein Raumstück nicht anders als aus *kantigen* Bausteinen lückenlos aufbauen können, fehlen uns vorerst die Mittel, darüber etwas Genaueres auszumachen. Wir müssen zufrieden sein, daß wir wenigstens Methoden besitzen, um das erste Glied der asymptotischen Entwicklung, das ja auch bei weitem das wichtigste ist, sicherzustellen.

Hingegen liegt in anderer Richtung die Möglichkeit einer wesentlichen Fortführung und Erweiterung der gegenwärtigen Untersuchungen vor: *neben die Asymptotik der Eigenwerte hat eine Asymptotik der Eigenfunktionen zu treten;* es kommt darauf an, einzusehen, daß an den in einem Hohlraum möglichen elektromagnetischen Eigenschwingungen nicht nur die Schwingungszahlen, sondern der gesamte Schwingungszustand (in einiger Entfernung von den Spiegelwänden) durch die Form der Begrenzung nur unwesentlich beeinflußt wird. Darauf werde ich in einer nachfolgenden Arbeit zurückkommen.

§ 6.

Die im vorstehenden entwickelten Methoden sind auch imstande, alle erhaltenen Resultate auf die allgemeine sich selbst adjungierte, den Spektrumsparameter λ linear enthaltende Differentialgleichung*)

$$\Delta u - qu + \lambda k u = 0 \tag{29.}$$

zu übertragen, in der $k(>0)$ und q gegebene stetige Funktionen in J sind. Als Oberflächenbedingung nehmen wir $u = 0$. Über die Abhängigkeit der zugehörigen Eigenwerte λ von dem Koeffizienten q gibt der folgende Satz Auskunft:

(I.) Wählen wir für q zwei verschiedene Funktionen q' und q'', und heißen die bezüglichen Eigenwerte (der Größe nach geordnet) λ_n', λ_n'', so bleibt die Differenz $\lambda_n' - \lambda_n''$ für alle n zwischen endlichen Grenzen, nämlich zwischen dem Minimum und dem Maximum von $\frac{q' - q''}{k}$.

Zum Beweise dieser Behauptung, welche zeigt, von wie geringem Einfluß q auf die Eigenwertverteilung ist, benutzen wir die in § 4 dar-

*) Daß in der Tat diese Gleichung als die allgemeinste Form des Problems betrachtet werden darf, lehrt die in A., S. 463 von mir angegebene Transformation.

gelegte Kontinuitätsmethode. Wir führen also einen Parameter ϑ ein, indem wir q in (29.) durch

$$q_\vartheta = \vartheta q' + (1-\vartheta) q''$$

ersetzen, und verstehen dann unter $\lambda_\vartheta, u_\vartheta$ einen Eigenwert nebst zugehöriger Eigenfunktion von (29.), Größen, die so zu determinieren sind, daß sie stetig mit ϑ variieren. Dann liefert ein analoger Schluß wie in § 4 die Gleichung:

$$\frac{d\lambda_\vartheta}{d\vartheta} \cdot \int_J k u_\vartheta^2 \, dp = \int_J (q' - q'') \, u_\vartheta^2 \, dp.$$

Es liegt demnach $\frac{d\lambda_\vartheta}{d\vartheta}$ zwischen dem Minimum und Maximum von $\frac{q'-q''}{k}$, und daraus ergibt sich die Richtigkeit unseres Satzes, wenn wir nach ϑ von 0 bis 1 integrieren.

Demnach kann man sich auf die Untersuchung von

(30.) $\qquad \Delta u + \lambda k u = 0$ (Randbedingung: $u = 0$)

beschränken.

(II.) Für die Anzahl $n^{(k)}(L)$ der Eigenwerte von (30.), die unterhalb der Grenze L liegen, gilt, wenn k_0 das Minimum, k^0 das Maximum von k in J ist,

$$n^{(1)}(Lk_0) \leqq n^{(k)}(L) \leqq n^{(1)}(Lk^0).$$

Bezeichnet nämlich der Buchstabe G wieder die zugehörigen *Green*schen Funktionen, so ist

$$G^{(k)} = \sqrt{k(p)\,k(p')} \cdot G(pp'),$$

und mithin sind

$$k^0 \cdot G - G^{(k)} \quad \text{und} \quad G^{(k)} - k_0 \cdot G$$

Kerne von positiv-definitem Typus.

Um aber ein genaueres Gesetz für $n^{(k)} = n_J^{(k)}$ zu ermitteln, teilen wir J in endlichviele kleine Parzellen $J_1, J_2, \ldots J_r$. Dann ist

$$G_J^{(k)} - \sum_{l=1}^{r} G_{J_l}^{(k)}$$

ein Kern mit lauter positiven Eigenwerten (C I, § 4), und sein n-ter reziproker Eigenwert konvergiert mit unbegrenzt wachsendem n mindestens so stark gegen 0 wie $\frac{\lg n}{n}$ (Beweis wie auf S. 191, 192 dieser Note).

(III.) Infolgedessen ist

(31.) $\qquad n_J^{(k)} \geqq n_{J_1}^{(k)} + n_{J_2}^{(k)} + \cdots + n_{J_r}^{(k)};$

im asymptotischen Sinne aber kann diese Ungleichung (mit einem prozentualen Fehler höchstens von der Größenordnung $\frac{\sqrt{\lg L}}{\sqrt[4]{L}}$) durch die entsprechende *Gleichung* ersetzt werden.

Wenden wir auf die einzelnen Parzellen J_l den Satz (II.) an und benutzen die asymptotische Darstellung von $n^{(1)}(L)$, so ist damit

(IV.) *ein Beweis des asymptotischen Gesetzes*

$$n_J^{(k)}(L) \backsim \frac{1}{6\pi^2} L^{3/2} \cdot \int_J (k(p))^{3/2} dp$$

geliefert.

Über die gleichmäßige Konvergenz *Dirichlet*scher Reihen.

Von Herrn *Harald Bohr* in Kopenhagen.

Einleitung.

Es sei

$$(1.) \qquad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \quad (\lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty)$$

eine Folge reeller Zahlen und

$$(2.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

eine zugehörige *Dirichlet*sche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt.

Dann existieren bekanntlich zwei Geraden, *die Konvergenzgerade* $\sigma = A$ und *die absolute Konvergenzgerade* $\sigma = B$, wo $-\infty \leqq A < \infty$, $-\infty \leqq B \leqq \infty$, $A \leqq B$ ist, mit folgenden Eigenschaften: Es ist (2.) für $\sigma > A$ konvergent, für $\sigma < A$ divergent, sowie für $\sigma > B$ absolut konvergent, für $\sigma < B$ nicht absolut konvergent. Ferner ist bekanntlich bei jedem $\varepsilon > 0$, $E > 0$ die Reihe (2.) im Gebiete $\sigma > A + \varepsilon$, $|s| < E$ (dagegen nicht notwendig in der ganzen Halbebene $\sigma > A + \varepsilon$) gleichmäßig konvergent.

In einer Note*) habe ich eine dritte für die Reihe (2.) charakteristische Konvergenzgerade, *die gleichmäßige Konvergenzgerade* $\sigma = C$ durch die folgende Definition eingeführt: Es ist C $(-\infty \leqq C \leqq \infty)$ diejenige Zahl, für die bei jedem $\varepsilon > 0$ die Reihe (2.) in der Halbebene $\sigma > C + \varepsilon$, dagegen nicht in der Halbebene $\sigma > C - \varepsilon$ gleichmäßig konvergiert. Hierbei ist offenbar $A \leqq C \leqq B$.

*) *H. Bohr*, Sur la convergence des séries de *Dirichlet*. Comptes rendus de l'Acad. d. sc. Paris, T. 151 (1910), p. 375—377.

Es sei $f(s)$ die durch die Reihe (2.) definierte Funktion. Dann werde ich *die Gerade* $\sigma = D$ folgendermaßen einführen: Es ist D $(-\infty \leqq D \leqq \infty)$ diejenige Zahl, für die, bei jedem $\varepsilon > 0$, $f(s)$ für $\sigma > D + \varepsilon$, dagegen nicht für $\sigma > D - \varepsilon$ regulär und beschränkt ist.

Es sei (1.) eine beliebige Exponentenfolge, die die folgende Bedingung I erfüllt:

I: *Es existiert eine Zahl* $l \geqq 0$ *derart, daß bei jedem* $\delta > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n (l+\delta)})$$

*ist**).

Dann gilt, wie ich in § 1 beweisen werde, der folgende Satz: *Es möge die Dirichletsche Reihe* (2.) *ein Konvergenzgebiet besitzen. Dann ist* $C = D$.

Dieser Satz, von welchem ich in der zitierten Note einen Spezialfall**) ohne Angabe meines Beweises mitgeteilt habe, zeigt, daß unter der Bedingung I die gleichmäßige Konvergenzgerade $\sigma = C$ der Reihe (2.) eine für die durch die Reihe definierte Funktion charakteristische Gerade ist, d. h., daß sie sich aus den allereinfachsten analytischen Eigenschaften (nämlich der Regularität und Beschränktheit) dieser Funktion genau bestimmen läßt.

In § 2 werde ich diejenigen *Dirichlet*schen Reihen untersuchen, deren Exponentenfolge (1.) die folgende Bedingung II erfüllt:

II: *Es ist*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0^{***}).$$

Diese Bedingung ist, wie in § 2 unmittelbar gezeigt wird, mit der folgenden identisch: Es ist für jede zur Exponentenfolge (1.) gehörige *Dirichlet*sche

---

*) Ein wichtiger Spezialfall einer Exponentenfolge (1.), die die Bedingung I erfüllt, ist die zu den *Dirichlet*schen Reihen vom Typus $\sum \frac{a_n}{n^s}$ gehörige Exponentenfolge $\lambda_n = \log n$.

**) Nämlich unter engeren Bedingungen über die Exponentenfolge (1.).

***) Es ist die Bedingung II weder in der Bedingung I enthalten, noch enthält sie die Bedingung I, d. h. es gibt einerseits Exponentenfolgen (z. B. $\lambda_n = \log n$), die I aber nicht II erfüllen, andererseits Exponentenfolgen (z. B. $\lambda_{2n-1} = n$, $\lambda_{2n} = n + e^{-n^2}$), die II aber nicht I erfüllen.

Reihe die Breite des bedingten Konvergenzstreifens gleich 0, d. h. es ist $A = B$, also auch $A = B = C$.

Ich beweise nunmehr in § 2: *Es ist der gemeinsame Wert von A, B und C gleich D,* wodurch eine bekannte Eigenschaft der Potenzreihen (Spezialfall $\lambda_n = n$) auf eine allgemeine Klasse *Dirichlet*scher Reihen übertragen ist. Damit wird alsdann, für sämtliche *Dirichlet*sche Reihen, deren Exponentenfolge die Bedingung II erfüllt, das Konvergenzproblem erledigt sein.

§ 1.

Es sei in diesem Paragraph durchweg (1.) eine Exponentenfolge, die die Bedingung I erfüllt. Dann gilt, wie ich an anderem Orte*) bewiesen habe, der folgende

Hilfssatz 1. *Es sei für alle* $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$w_m = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}$$

gesetzt. Dann ist bei jedem festen $x < -l$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x}$$

konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n x}}{|w_m - \lambda_n|} = O(1),$$

wobei sich die Abschätzung auf ganzes wachsendes m bezieht.

Unter Benutzung dieses Hilfssatzes läßt sich nunmehr mit Hilfe des *Cauchy*schen Integralsatzes der folgende Satz beweisen.

Hilfssatz 2. *Es sei* (2.) *in einer gewissen Halbebene konvergent. Die hier durch die Reihe definierte Funktion sei für* $\sigma > \eta$ *regulär und beschränkt, d. h. es sei für* $\sigma > \eta$

$$|f(s)| < k_1,$$

wo k_1 *von s nicht abhängt. Dann ist, bei jedem festen* $\varepsilon > 0$, (2.) *für* $\sigma > \eta + \varepsilon$ *gleichmäßig konvergent.*

---

*) *H. Bohr*, Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem *Dirichlet*scher Reihen, Rend. d. Circ. d. Palermo 1913, § 1. Unter engeren Bedingungen über die Exponentenfolge kam dieser Hilfssatz schon bei den *Landau-Schnee*schen Untersuchungen über das Konvergenzproblem vor. Vergl. z. B. *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin 1909, Bd. II, S. 840—841.

Vorbemerkung: Der folgende Beweis ist einem *Schnee*schen Beweise*) eines Satzes über das Konvergenzproblem *Dirichlet*scher Reihen nachgebildet. Der Unterschied liegt wesentlich nur darin, daß bei unserem Beweise die abzuschätzenden Glieder *gleichmäßig* in bezug auf einen Parameter (die Ordinate β des betrachteten Punktes $\gamma = \alpha + i\beta$) abgeschätzt werden.

Beweis: Es darf offenbar beim Beweise $|a_n| < k_2$ angenommen werden, wo k_2 von n nicht abhängt; denn es sei σ_0 irgendein solcher reeller Wert, daß (2.) für $s = \sigma_0$ konvergiert, dann ist a fortiori

$$|a_n'| = |a_n e^{-\lambda_n \sigma_0}| < \text{Konst.},$$

und es braucht nur statt s die neue Variable $s' = \sigma' + it = s - \sigma_0$ eingeführt zu werden.

Wegen $|a_n| < k_2$, konvergiert (2.) nach dem Hilfssatze 1 für $\sigma \geqq l + \varepsilon$ absolut, also a fortiori für $\sigma > l + \varepsilon$ gleichmäßig; d. h. es ist der Satz für $\eta \geqq l$ trivial. Es darf also beim Beweise $\eta < l$ angenommen werden. Es sei ferner angenommen, daß die gegebene positive Zahl ε kleiner als $l - \eta$ ist. Der Satz bedarf offenbar nur für $\eta + \varepsilon < \sigma < l + \frac{\varepsilon}{2}$ eines Beweises. Es sei $\gamma = \alpha + i\beta$; dann lautet die Behauptung: es ist gleichmäßig für $\eta + \varepsilon < \alpha < l + \frac{\varepsilon}{2}$

$$f(\gamma) = \lim_{m=\infty} \sum_{\lambda_n \leqq w_m} a_n e^{-\lambda_n \gamma},$$

wo $w_m = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}$ das w_m des Hilfssatzes 1 bedeutet.

Es folgt zunächst in üblicher Weise, mit Hilfe der beiden bekannten Ungleichungen**)

$$\left| \int_{a-\omega i}^{a+\omega i} \frac{e^{zs}}{s}\, ds - 2\pi i \right| \leqq \frac{2}{\omega} \frac{e^{za}}{z} \qquad (\text{für } a > 0,\ \omega > 0,\ z > 0),$$

$$\left| \int_{a-\omega i}^{a+\omega i} \frac{e^{zs}}{s}\, ds \right| \leqq \frac{2}{\omega} \frac{e^{za}}{-z} \qquad (\text{für } a > 0,\ \omega > 0,\ z < 0),$$

die Abschätzung

---

*) Vergl. z. B. *Landau*, a. a. O. S. 844—848.

**) Vergl. *Landau*, a. a. O. S. 825—826.

$$\left|\int_{l+\varepsilon+\beta i-\omega i}^{l+\varepsilon+\beta i+\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds-2\pi i\sum_{\lambda_n<w_m}a_n e^{-\lambda_n\gamma}\right|\leqq\frac{2}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n e^{-\lambda_n\gamma}\right|\frac{e^{(w_m-\lambda_n)(l+\varepsilon-a)}}{|w_m-\lambda_n|}$$

$$<\frac{2k_2e^{w_m(l+\varepsilon-a)}}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n(l+\varepsilon)}}{|w_m-\lambda_n|}<\frac{2k_2}{\omega}e^{w_m(l-\eta)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n(l+\varepsilon)}}{|w_m-\lambda_n|},$$

also nach dem Hilfssatz 1, wenn ich in der Folge mit $k_3, k_4, \ldots$ positive Konstanten, d. h. nicht von γ, m und ω (wohl aber von ε) abhängige Größen bezeichne,

$$\left|\int_{l+\varepsilon+\beta i-\omega i}^{l+\varepsilon+\beta i+\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds-2\pi i\sum_{\lambda_n<w_m}a_n e^{-\lambda_n\gamma}\right|<\frac{k_3}{\omega}e^{w_m(l-\eta)}.$$

Ich setze nunmehr $\omega=\omega(m)=e^{2w_m(l-\eta)}$; dann ergibt sich

$$\left|\int_{l+\varepsilon+\beta i-\omega i}^{l+\varepsilon+\beta i+\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds-2\pi i\sum_{\lambda_n<w_m}a_n e^{-\lambda_n\gamma}\right|<k_3e^{-w_m(l-\eta)}.$$

Es werde nunmehr der *Cauchy*sche Integralsatz auf den Integranden

$$\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)$$

und das Rechteck mit den Ecken $l+\varepsilon+\beta i\pm\omega i$, $\eta+\frac{\varepsilon}{2}+\beta i\pm\omega i$ angewendet, auf und in welchem der Integrand nach Voraussetzung bis auf den etwaigen*) Pol $s=\gamma$ mit dem Residuum $f(\gamma)$ regulär ist:

$$\int_{l+\varepsilon+\beta i-\omega i}^{l+\varepsilon+\beta i+\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds=2\pi i f(\gamma)+\int_{l+\varepsilon+\beta i-\omega i}^{\eta+\frac{\varepsilon}{2}+\beta i-\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds$$

$$+\int_{\eta+\frac{\varepsilon}{2}+\beta i-\omega i}^{\eta+\frac{\varepsilon}{2}+\beta i+\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds+\int_{\eta+\frac{\varepsilon}{2}+\beta i+\omega i}^{l+\varepsilon+\beta i+\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds.$$

Nach Voraussetzung ist für $\sigma>\eta$

$$|f(s)|<k_1;$$

---

*) Für $f(\gamma)=0$ ist $s=\gamma$ eine reguläre Stelle, also die folgende Formel auch richtig.

das erste und dritte Integral auf der rechten Seite ist also, jedes absolut genommen, kleiner als

$$\left(l-\eta+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{e^{w_m(l+\varepsilon-a)}}{\omega}k_1<k_4\,\frac{e^{w_m(l-\eta)}}{\omega}=k_4e^{-w_m(l-\eta)},$$

und für das zweite Integral auf der rechten Seite gilt die Abschätzung

$$\left|\int_{\eta+\frac{\varepsilon}{2}+\beta i-\omega i}^{\eta+\frac{\varepsilon}{2}+\beta i+\omega i}\frac{e^{w_m(s-\gamma)}}{s-\gamma}f(s)\,ds\right|<k_1e^{w_m\left(\eta+\frac{\varepsilon}{2}-a\right)}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{\sqrt{\left(\eta+\frac{\varepsilon}{2}-\alpha\right)^2+t^2}}<k_1e^{-w_m\frac{\varepsilon}{2}}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}+t^2}}$$

$$<k_5e^{-w_m\frac{\varepsilon}{2}}\log\omega=k_5e^{-w_m\frac{\varepsilon}{2}}\,2w_m(l-\eta)<k_6e^{-w_m\frac{\varepsilon}{3}}.$$

Es ergibt sich somit schließlich für alle dem Streifen $\eta+\varepsilon<\alpha<l+\frac{\varepsilon}{2}$ angehörigen $\gamma=\alpha+i\beta$

$$\left|f(\gamma)-\sum_{\lambda_n<w_m}a_ne^{-\lambda_n\gamma}\right|<\frac{1}{2\pi}\left(k_3e^{-w_m(l-\eta)}+2k_4e^{-w_m(l-\eta)}+k_6e^{-w_m\frac{\varepsilon}{3}}\right)<k_7e^{-w_m\frac{\varepsilon}{3}},$$

wo k_7 von γ und m nicht abhängt; d. h. es ist gleichmäßig für $\eta+\varepsilon<\alpha<l+\frac{\varepsilon}{2}$

$$f(\gamma)=\lim_{m=\infty}\sum_{\lambda_n<w_m}a_ne^{-\lambda_n\gamma},$$

womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Es habe C und D die in der Einleitung erklärte Bedeutung, dann läßt sich nunmehr leicht der folgende schon in der Einleitung erwähnte Satz beweisen.

Satz I: *Es möge die Dirichletsche Reihe* (2.) *ein Konvergenzgebiet besitzen. Dann ist*

$$C=D.$$

Beweis: Da die Reihe (2.) ein Konvergenzgebiet besitzt, ist nach der ersten Hälfte des Hilfssatzes 1 die absolute Konvergenzabszisse $B<\infty$. Wegen $C\leqq B$, $D\leqq B$ ist also sowohl C als D von $+\infty$ verschieden.

1) Es ist $C\leqq D$; denn nach dem Hilfssatz 2 ist bei jedem $\eta>D$, $\varepsilon>0$ die Reihe (2.) für $\sigma>\eta+\varepsilon$ gleichmäßig konvergent: es ist also, bei jedem $\eta>D$, $C\leqq\eta$ d. h. es ist $C\leqq D$.

2) Es ist aber auch $D\leqq C$; die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich sofort folgendermaßen: Bei jedem $\sigma_0>C$ ist (2.) für $\sigma>\sigma_0$ gleichmäßig konvergent; es ist also a fortiori ein positives ganzes $N=N(\sigma_0)$ so wählbar, daß für $\sigma>\sigma_0$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \right| < 1$$

ist; dann ist für $\sigma > \sigma_0$, wegen $\lambda_1 \geqq 0$,

$$|f(s)| < \sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} + 1 = K,$$

wo K von s nicht abhängt; es ist also, bei jedem $\sigma_0 > C$, $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt, d. h. es ist $D \leqq C$.

Damit ist der Satz I bewiesen.

§ 2.

Es sei im folgenden durchweg (1.) eine Exponentenfolge, die die Bedingung II der Einleitung erfüllt, d. h. es sei

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0.$$

Anders ausgedrückt sagt diese Bedingung aus*): es ist die Konvergenzabszisse der Reihe $\Sigma e^{-\lambda_n s}$ gleich 0, also $\Sigma e^{-\lambda_n \delta}$ bei jedem $\delta > 0$ konvergent, d. h. es ist für jede Reihe (2.) die Konvergenzabszisse A gleich der absoluten Konvergenzabszisse B.

Wie ich an anderem Orte**) bewiesen habe, gilt der folgende

Hilfssatz 3: *Es existiert eine reelle Zahlenfolge* $0 < w_1 < w_2 < \cdots < w_m < \cdots$ $(\lim w_m = \infty)$ *derart, daß bei jedem festen* $x < 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n x}}{|w_m - \lambda_n|} = O(1)$$

*ist, wobei sich die Abschätzung auf ganzes wachsendes m bezieht****).

Es bezeichne im folgenden $w_1 < w_2 \cdots < w_m < \cdots$ eine Zahlenfolge im Sinne des Hilfssatzes 3.

Hilfssatz 4: *Es sei* (2.) *in einer gewissen Halbebene konvergent. Die hier durch die Reihe definierte Funktion* $f(s)$ *sei für* $\sigma > \eta$ *regulär und beschränkt. Dann ist bei jedem festen* $\varepsilon > 0$ *gleichmäßig für* $\sigma > \eta + \varepsilon$

$$f(s) = \lim_{m=\infty} \sum_{\lambda_n \leqq w_m} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Vorbemerkung: Der Satz besagt nicht die gleichmäßige Konvergenz für $\sigma > \eta + \varepsilon$ der Reihe (2.), d. h. der Reihe

*) Vgl. z. B. *Landau*, a. a. O., S. 732, Satz 5 (Siehe auch die Fußnote).

**) *H. Bohr*, Einige Bemerkungen, a. a. O., § 3. (Dort ist speziell $l = 0$ zu setzen).

***) Es ist das jetzige w_m nicht mit dem $w_m = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}$ des Paragraphen 1 zu verwechseln.

$$a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \cdots + a_r e^{-\lambda_r s} + \cdots,$$

sondern nur die gleichmäßige Konvergenz für $\sigma > \eta + \varepsilon$ der Reihe

$$\sum_{\lambda_n < w_1} a_n e^{-\lambda_n s} + \sum_{w_1 < \lambda_n < w_2} a_n e^{-\lambda_n s} + \cdots + \sum_{w_{r-1} < \lambda_n < w_r} a_n e^{-\lambda_n s} + \cdots *).$$

Beweis: Auf Grund des Hilfssatzes 3 (der hier an Stelle des Hilfssatzes 1 tritt) wörtlich wie der Beweis des Hilfssatzes 2, wenn in diesem letzten speziell $l = 0$ gesetzt wird.

Es habe A, B und C die in der Einleitung erklärte Bedeutung; dann ist $A = B = C$ und es gilt der folgende

Hilfssatz 5: *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 ist der gemeinsame Wert von A, B und C kleiner als oder gleich η.*

Beweis: Da bei jedem $\delta > 0$ $\Sigma e^{-\lambda_n \delta}$ konvergiert, genügt es offenbar nachzuweisen: zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Zahl $N = N(\delta) \geqq 1$, derart, daß für $n \geqq N$

$$\left| a_n e^{-\lambda_n (\eta + \delta)} \right| \leqq 1$$

ist.

Nach dem Hilfssatze 4 ist speziell auf der Geraden $\sigma = \eta + \delta$ die Reihe

$$\sum_{\lambda_n < w_1} a_n e^{-\lambda_n s} + \sum_{w_1 < \lambda_n < w_2} a_n e^{-\lambda_n s} + \cdots + \sum_{w_{m-1} < \lambda_n < w_m} a_n e^{-\lambda_n s} + \cdots$$

gleichmäßig konvergent. Es gibt also a fortiori eine ganze Zahl $M = M(\delta) \geqq 2$, so daß für $\sigma = \eta + \delta$ und $m \geqq M$

$$\left| \sum_{w_{m-1} < \lambda_n < w_m} a_n e^{-\lambda_n s} \right| \leqq 1$$

ist. Es sei $N = N(\delta) \geqq 1$ so gewählt, daß $\lambda_N > w_{M-1}$ ist; dann behaupte ich: dies N hat die obige Eigenschaft. In der Tat, es sei $n \geqq N$ und $m = m(n) \geqq M$ diejenige Zahl, daß $w_{m-1} < \lambda_n < w_m$ ist: dann ist offenbar, wegen der bei jedem reellen $z \neq 0$ gültigen Gleichung

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{\eta+\delta}^{\eta+\delta+iT} e^{zs} ds = 0,$$

$$a_n = \lim_{T=\infty} \frac{1}{iT} \int_{\eta+\delta}^{\eta+\delta+iT} e^{\lambda_n s} \Big(\sum_{w_{m-1} < \lambda_r < w_m} a_r e^{-\lambda_r s} \Big) ds,$$

also, wegen

---

*) Wenn kein $\lambda_n < w_1$ ist, bez. kein λ_n dem Intervalle $w_{r-1} < x < w_r$ angehört, soll $\sum_{\lambda_n < w_1}$ bzw. $\sum_{w_{r-1} < \lambda_n < w_r}$ die Zahl 0 bedeuten.

$$\left| \int_{\eta+\delta}^{\eta+\delta+iT} e^{\lambda_n s}\Big(\sum_{w_{m-1}<\lambda_r<w_m} a_r e^{-\lambda_r s}\Big) ds \right| \leqq e^{\lambda_n(\eta+\delta)} \cdot T,$$

$$|a_n| \leqq e^{\lambda_n(\eta+\delta)}$$

d. h.

$$|a_n e^{-\lambda_n(\eta+\delta)}| \leqq 1.$$

Es seien A, B, C und D die in der Einleitung definierten Zahlen; dann ergibt sich nunmehr unmittelbar der Beweis des folgenden Satzes, welcher das Ziel dieses Paragraphen bildet.

Satz II: *Es möge die Dirichletsche Reihe* (2.) *ein Konvergenzgebiet besitzen. Dann ist der gemeinsame Wert von A, B und C gleich D.*

Beweis: 1) Auf Grund des Hilfssatzes 5 ist $A \leqq D$.

2) Da jede für $\sigma > \sigma_0$ konvergente (also auch absolut konvergente) Reihe (2.) eine für $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ reguläre und beschränkte Funktion darstellt, ist $D \leqq A$.

Es ist also $A = D$*), w. z. b. w.

---

*) Als Beispiel einer *Dirichlet*schen Reihe, deren Exponentenfolge die Bedingung II erfüllt, und die über ihre Konvergenzgerade hinaus regulär ist, sei die folgende, in § 3 meiner zitierten Palermo-Arbeit betrachtete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^{n-1} e^{\lambda_n s}$ erwähnt, wo $\lambda_{2n-1} = n$, $\lambda_{2n} = n + e^{-n^2}$ ist. Es ist diese Reihe nur für $\sigma > 0$ konvergent, während die durch die Reihe definierte Funktion eine ganze Transzendente ist.

Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle*).

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

Der in Bd. 120 und Bd. 122 dieses Journals unter gleichem Titel erschienene Aufsatz soll im folgenden im Hinblick auf wichtige neuere Untersuchungen von *Watson* über asymptotische Reihen**) weitergeführt werden.

In dem früheren Aufsatz (Bd. 120, S. 1 ff.) wurde die lineare Differentialgleichung

$$(D.) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx} + g(x)\,y = h(x)$$

betrachtet, worin $k > 0$ eine ganze positive Zahl,

$$g(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$$

und

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

eine konvergente Potenzreihe von x ist***). Die Differentialgleichung (D.) wird formell befriedigt durch die im allgemeinen divergente Reihe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

deren Koeffizienten sich aus den folgenden Gleichungen ergeben:

---

*) Vgl. den Aufsatz in Bd. 120, S. 1—26 und Bd. 122, S. 73—83.

**) A Theory of Asymptotic Series; Phil. Transactions of the Royal Society of London, A 211 (1911), S. 279—313.

***) Die Differentialgleichung (1.) in Bd. 122, S. 73 ist durch (D.) zu ersetzen.

$$
\begin{aligned}
&c_0 = b_0,\\
&c_1 + a_1 c_0 = b_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_k + a_1 c_{k-1} + \cdots + a_k c_0 = b_k,\\
&c_n + a_1 c_{n-1} + \cdots + a_{k-1} c_{n-k+1} + (a_k + n - k) c_{n-k} = b_n. \qquad (n > k)
\end{aligned}
$$

A. a. O. sind die folgenden k ausgezeichneten Integrale der Differentialgleichung (D.) betrachtet worden:

$$\eta_m = e^{\frac{1}{kx^k} + \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k} \int_0^x \frac{h(x)}{x^{k+1}} e^{-\frac{1}{kx^k} - \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{x}} x^{a_k}\, dx; \qquad (m = 0, 1, \ldots k-1)$$

der Integrationsweg verläßt den Punkt $x = 0$ mit $\arg x = \frac{2m\pi}{k}$ oder mit einem zwischen $\frac{2m\pi - \frac{\pi}{2}}{k}$ und $\frac{2m\pi + \frac{\pi}{2}}{k}$ gelegenen Argument, und die Veränderliche x wird auf den Sektor

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k}$$

beschränkt, wo δ eine beliebig kleine positive Größe darstellt. Setzt man, unter n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ verstehend,

$$\eta_m = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1},$$

so bleibt $|\gamma_n|$ unter einer endlichen Größe, wenn $|x|$ hinreichend klein angenommen wird, während x in dem angegebenen Sektor bleibt*). Oder anders ausgedrückt: die Funktion η_m wird in dem bezeichneten Sektor durch die Reihe S asymptotisch dargestellt.

Nach *Watson* ist es wichtig, *die Abhängigkeit des Reihenkoeffizienten c_n und der im Restglied enthaltenen Größe γ_n vom Index n zu untersuchen* oder, wie *Watson* sagt, die Charakteristiken der asymptotischen Reihe zu bestimmen. Dies wird für unsere Reihe in § 1 durchgeführt.

Das *Laplacesche Integral*, welches sich im Falle $k = 1$ nach der Theorie von *Borel* und *Watson* aus der asymptotischen Reihe S herleiten läßt, kann auch unmittelbar aus der Differentialgleichung (D.) erhalten

*) Zwischen γ_n und der a. a. O. mit ε_n bezeichneten Größe besteht die Beziehung $\gamma_n = \frac{\varepsilon_n}{x}$.

werden, wie in § 2 gezeigt wird; für den Fall $k > 1$ ergibt sich in § 3 eine Abänderung der *Laplace*schen Integraldarstellung.

In § 4 wird andeutungsweise gezeigt, wie sich für die Integrale η_m *konvergente Fakultätenreihen* aufstellen lassen*).

Die Differentialgleichungen (D.) und die Integrale η_m bilden nicht nur ein einfaches Beispiel zur Theorie der Differentialgleichungen mit Unbestimmtheitsstellen und der asymptotischen Reihen, sondern sie stellen auch ein wichtiges Hilfsmittel für weitergehende Untersuchungen dar, wie sich in verschiedenen Arbeiten über lineare und nicht lineare Differentialgleichungen gezeigt hat.

§ 1.

Um den Koeffizienten c_n der Reihe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

welche die Differentialgleichung (D.) formell befriedigt, als Funktion von n zu untersuchen, benutzen wir die Rekursionsformel (lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung)

$$c_n + a_1 c_{n-1} + \cdots + a_{k-1} c_{n-k+1} + (a_k + n - k)\, c_{n-k} = b_n.$$

Diese geht durch die Substitution

$$c_n = (n!)^{\frac{1}{k}} (1+\varepsilon)^n C_n,$$

wo ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, in die Differenzengleichung

$$C_n + p_n^{(1)} C_{n-1} + \cdots + p_n^{(k)} C_{n-k} = \frac{b_n}{(n!)^{\frac{1}{k}} (1+\varepsilon)^n}$$

mit den Koeffizienten

$$p_n^{(\lambda)} = a_\lambda n^{-\frac{\lambda}{k}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{k}} \cdots \left(1-\frac{\lambda-1}{n}\right)^{-\frac{1}{k}} \cdot (1+\varepsilon)^{-\lambda}, \qquad (\lambda = 1, \ldots k-1)$$

$$p_n^{(k)} = \left(1+\frac{a_k - k}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{k}} \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{-\frac{1}{k}} \cdot (1+\varepsilon)^{-k}$$

über.

---

*) Vgl. den Aufsatz des Verf. „Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen“ (Math. Ann., Bd. 71, S. 510—532) und die Arbeit von *Watson* „The Transformation of an Asymptotic Series into a Convergent Series of Inverse Factorials“ (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, Bd. 34, S. 1—48).

Es sei

$$\sigma = \limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|b_n|},$$

also $\frac{1}{\sigma}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $h(x)$. Dann ist, wenn $\sigma' > \sigma$ angenommen wird,

$$|b_n| \leqq \mathfrak{B}\sigma'^n,$$

wo $\mathfrak{B}$ von n unabhängig ist. Es ist

$$|C_n| \leqq |p_n^{(1)}| \cdot |C_{n-1}| + \cdots + |p_n^{(k)}| \cdot |C_{n-k}| + \frac{\mathfrak{B}\sigma'^n}{(n!)^{\frac{1}{k}}(1+\varepsilon)^n}.$$

Der Ausdruck

$$P = |p_n^{(1)}| + \cdots + |p_n^{(k)}| + \frac{\sigma'^n}{(n!)^{\frac{1}{k}}(1+\varepsilon)^n}$$

hat für $n = \infty$ den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} |p_n^{(k)}| = (1+\varepsilon)^{-k} < 1;$$

daher ist $P \leqq 1$ für $n \geqq n_0$ (n_0 hinreichend groß). Wir nehmen an, die Größen $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{n_0-1}|$ seien höchstens gleich der positiven Größe A; wir setzen $A \geqq \mathfrak{B}$ voraus. Dann ist für alle n

$$|C_n| \leqq A;$$

denn unter der Annahme $|C_{n-1}| \leqq A$, $|C_{n-2}| \leqq A, \ldots$ ist $|C_n| \leqq PA \leqq A$.

Es gilt also der Satz:

Die Koeffizienten der die Differentialgleichung (D.) *formell befriedigenden Reihe*

$$S = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

genügen der Bedingung

$$|c_n| \leqq A(n!)^{\frac{1}{k}}(1+\varepsilon)^n,$$

wo A und ε von n unabhängige positive Größen sind und ε beliebig klein angenommen werden kann.

Aus der *Stirling*schen Formel folgt

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} \leqq Qk^{\frac{n}{k}},$$

wo Q eine von n unabhängige positive Größe darstellt. Demnach ist

$$|c_n| \leqq A(n!)^{\frac{1}{k}}(1+\varepsilon)^n \leqq A \cdot Q\,\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)k^{\frac{n}{k}} \cdot (1+\varepsilon)^n$$

oder, wenn $AQ = A'$ gesetzt wird,

$$|c_n| \leqq A' \Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right) \cdot (\sqrt[k]{k} \cdot (1+\varepsilon))^n.$$

Im Anschluß an § 1 der Arbeit in Bd. 120 soll die in der Gleichung

$$\eta_m = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1}$$

enthaltene Funktion γ_n genauer untersucht werden.

Setzt man

$$J_\nu = e^{\frac{1}{kx^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k} \int_0^x e^{-\frac{1}{kv^k} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{v}} v^{a_k+\nu-k-1}\, dv,$$

wo der frühere Integrationsweg benutzt wird*), so erhält man durch partielle Integration

$$x^\nu = J_\nu + a_1 J_{\nu+1} + \cdots + a_{k-1} J_{\nu+k-1} + (a_k + \nu) J_{\nu+k}.$$

Wenn man vermittelst dieser Formel x^ν in dem Ausdruck $\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x^\nu$ durch $J_\nu, J_{\nu+1}, \ldots$ ausdrückt und die Rekursionsformeln für die c_ν benutzt, erhält man

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = b_0 J_0 + b_1 J_1 + \cdots + b_n J_n - B_n^{(1)} J_{n+1} - \cdots - B_n^{(k)} J_{n+k};$$

dabei ist

$$\begin{aligned} B_n^{(1)} &= c_{n+1} - b_{n+1}, \\ B_n^{(2)} &= c_{n+2} + a_1 c_{n+1} - b_{n+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_n^{(k)} &= c_{n+k} + a_1 c_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1} c_{n+1} - b_{n+k}. \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$\begin{aligned} g_n^{(0)} &= B_n^{(1)} + b_{n+1} = c_{n+1}, \\ g_n^{(1)} &= B_n^{(2)} + b_{n+2} = c_{n+2} + a_1 c_{n+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n^{(k-1)} &= B_n^{(k)} + b_{n+k} = c_{n+k} + a_1 c_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1} c_{n+1}, \\ g_n^{(\mu)} &= b_{n+\mu+1} \qquad (\mu \geqq k) \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \eta_m &= \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu J_\nu = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + g_n^{(0)} J_{n+1} + g_n^{(1)} J_{n+2} + \cdots \\ &= c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1}, \\ \gamma_n &= x^{-n-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_n^{(\mu)} J_{n+\mu+1} \\ &= e^{\frac{1}{kx^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k-n-1} \int_0^x \sum_{\mu=0}^{\infty} g_n^{(\mu)} v^\mu \cdot e^{-\frac{1}{kv^k} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{v}} v^{a_k+n-k}\, dv. \end{aligned}$$

*) Vgl. die Einleitung und Bd. 120, S. 4—5.

Durch die Substitution

$$\frac{1}{v^k} = \frac{1}{x^k} + w$$

erhält man

$$\gamma_n = \frac{1}{k}\int_0^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_n^{(\mu)} v^\mu \cdot e^{-\frac{w}{k} - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{a_{k-\lambda}[(1+x^k w)^{\frac{\lambda}{k}}-1]}{\lambda x^\lambda} - \frac{a_k+n+1}{k}\log(1+x^k w)}\, dw.$$

Die Betrachtungen in Bd. 120, S. 7—9 erfahren folgende Abänderungen.

Wir setzen

$$w = r e^{i\varphi}, \quad x = \varrho e^{i\vartheta};$$

wir nehmen

$$-2m\pi - \frac{\pi}{2} + \delta'' \leqq \varphi \leqq -2m\pi + \frac{\pi}{2} - \delta'', \quad -\pi + \delta' \leqq k\vartheta + \varphi \leqq \pi - \delta'$$

an, wo $0 < \delta' < \pi$, $0 < \delta'' < \frac{\pi}{2}$ ist; wenn $\delta = \delta' + \delta''$ gesetzt wird, ist $0 < \delta < \frac{3\pi}{2}$, und $\vartheta = \arg x$ wird auf das Gebiet*)

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k}$$

beschränkt.

Es ist

$$|1 + x^k w| = \sqrt{1 + (\varrho^k r)^2 + 2\varrho^k r \cos(k\vartheta + \varphi)} \geqq \sqrt{1 + (\varrho^k r)^2 - 2\varrho^k r \cos\delta'} \geqq \sin\delta';$$

demnach ist der absolute Betrag von

$$v = \frac{x}{\sqrt[k]{1 + x^k w}}$$

höchstens gleich

$$\frac{\varrho}{\sqrt[k]{\sin\delta'}}.$$

Nimmt man

$$\varrho \leqq \mathfrak{r}\sqrt[k]{\sin\delta'}, \quad \mathfrak{r} < \frac{1}{\sigma},$$

so ist $|v| \leqq \mathfrak{r}$ und, wenn $\frac{1}{\sigma} > \frac{1}{\sigma'} > \mathfrak{r}$ ist,

---

*) Die früher mit δ bezeichnete Größe heißt jetzt $\frac{\delta}{k}$.

$$\sum_{\mu=k}^{\infty} |g_n^{(\mu)} v^\mu| = \sum_{\mu=k}^{\infty} |b_{n+\mu+1} v^\mu| \leqq \sum_{\mu=k}^{\infty} \mathfrak{B}\, \sigma'^{n+\mu+1} \mathfrak{r}^\mu = \frac{\mathfrak{B}\, \sigma'^{n+1} (\sigma' \mathfrak{r})^k}{1 - \sigma' \mathfrak{r}}.$$

Ferner ist

$$|g_n^{(0)}| \leqq ((n+1)!)^{\frac{1}{k}} (1+\varepsilon)^{n+1} \cdot A,$$

$$|g_n^{(1)}| \leqq ((n+2)!)^{\frac{1}{k}} (1+\varepsilon)^{n+2} \cdot A \left(1 + \frac{|a_1|}{(n+2)^{\frac{1}{k}}}\right),$$

. . . . . .

$$|g_n^{(k-1)}| \leqq ((n+k)!)^{\frac{1}{k}} (1+\varepsilon)^{n+k} \cdot A \left(1 + \frac{|a_1|}{(n+k)^{\frac{1}{k}}} + \cdots + \frac{|a_{k-1}|}{(n+2)^{\frac{1}{k}} \cdots (n+k)^{\frac{1}{k}}}\right),$$

also für $|v| \leqq \mathfrak{r}$

$$\sum_{\mu=0}^{k-1} |g_n^{(\mu)} v^\mu| \leqq (n!)^{\frac{1}{k}} (1+\varepsilon')^n \mathfrak{A}',$$

wo $\varepsilon' > \varepsilon$ und $\mathfrak{A}'$ von n unabhängig ist. Demnach ist für $\varrho \leqq \mathfrak{r} \sqrt[k]{\sin \delta'}$

$$\left| \sum_{\mu=0}^{\infty} g_n^{(\mu)} v^\mu \right| \leqq (n!)^{\frac{1}{k}} (1+\varepsilon')^n \mathfrak{A}' + \frac{\mathfrak{B}\, \sigma'^{n+1} (\sigma' \mathfrak{r})^k}{1 - \sigma' \mathfrak{r}} \leqq \mathfrak{A} (1+\varepsilon')^n (n!)^{\frac{1}{k}},$$

wo $\mathfrak{A}$ von n unabhängig ist.

Der reelle Teil von

$$-\frac{w}{k} - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{a_{k-\lambda} [(1+x^k w)^{\frac{\lambda}{k}} - 1]}{\lambda x^\lambda} - \frac{a_k + n + 1}{k} \log (1 + x^k w)$$

ist nicht größer als die Summe aus dem reellen Teil

$$-\frac{r \cos \varphi}{k} \leqq -\frac{r \sin \delta''}{k}$$

des ersten Gliedes, dem reellen Teil des letzten Gliedes und den absoluten Beträgen der übrigen Glieder. Diese absoluten Beträge sind nicht größer als*)

$$\frac{|a_{k-\lambda}|}{\lambda} M_\lambda r^{\frac{\lambda}{k}}. \qquad (\lambda = 1, \ldots k-1)$$

Der reelle Teil des letzten Gliedes

$$-\frac{a_k + n + 1}{k} \log (1 + x^k w)$$

ist nicht größer als die Summe aus dem absoluten Betrag von

$$-\frac{a_k}{k} \log (1 + x^k w)$$

und dem reellen Teil von

*) Bd. 120, S. 8.

$$-\frac{n+1}{k}\log(1+x^k w),$$

d. h. nicht größer als*)

$$\frac{|a_k|}{k}(\log(1+\mathfrak{r}^k r)-\log\sin\delta'+\pi)-\frac{n+1}{k}\log\sin\delta'.$$

Es ist also

$$|\gamma_n| \leqq \frac{1}{k}\mathfrak{A}(1+\varepsilon')^n (n!)^{\frac{1}{k}} \times \int_0^\infty e^{-\frac{r\sin\delta''}{k}+\sum_{\lambda=1}^{k-1}\frac{|a_{k-\lambda}|}{\lambda}M_\lambda r^{\frac{\lambda}{k}}+\frac{|a_k|}{k}(\log(1+\mathfrak{r}^k r)-\log\sin\delta'+\pi)-\frac{n+1}{k}\log\sin\delta'} dr$$

$$= \frac{1}{k}\mathfrak{A}(1+\varepsilon')^n (n!)^{\frac{1}{k}} (\sin\delta')^{-\frac{n+1}{k}} \times \int_0^\infty e^{-\frac{r\sin\delta''}{k}+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{|a_{k-\lambda}|}{\lambda}M_\lambda r^{\frac{\lambda}{k}}+\frac{|a_k|}{k}(\log(1+\mathfrak{r}^k r)-\log\sin\delta'+\pi)} dr$$

$$= B(n!)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1+\varepsilon'}{\sqrt[k]{\sin\delta'}}\right)^n,$$

wo B von δ und δ' abhängig, aber von x und n unabhängig ist. Da ε' beliebig wenig größer als ε und ε eine beliebig kleine positive Größe ist, so ist auch ε' eine beliebig kleine positive Größe, für die wir künftig ε schreiben. Die zum Integral η_m gehörige Funktion γ_n möge jetzt mit $\gamma_n^{(m)}$ bezeichnet werden.

Wir haben den Satz bewiesen:

Wenn man

$$\eta_m = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n^{(m)} x^{n+1} \qquad (m=0,1,\ldots k-1)$$

setzt, ist für

$$|x| \leqq \mathfrak{r}\sqrt[k]{\sin\delta'}, \quad \mathfrak{r} < \frac{1}{\sigma},$$

$$\frac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}+\delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}-\delta}{k},$$

wo $0<\delta'<\pi$, $0<\delta<\frac{3\pi}{2}$, $\delta'<\delta$ *ist,*

$$|\gamma_n^{(m)}| \leqq B(n!)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt[k]{\sin\delta'}}\right)^n,$$

*) Bd. 120, S. 8 unten.

wo B und ε von x und n unabhängige positive Größen sind und ε beliebig klein angenommen werden kann.

Durch eine ähnliche Umformung wie oben ergibt sich

$$|\gamma_n^{(m)}| \leqq B' \, \Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)\left(\frac{\sqrt[k]{k}(1+\varepsilon)}{\sqrt[k]{\sin \delta'}}\right)^n.$$

Der Fall $k=1$, d. h. die Differentialgleichung

$$(D_1.) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} + (1+ax)y = h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

möge noch in etwas anderer Weise behandelt werden.

Die Koeffizienten der Reihe S berechnen sich aus den Gleichungen

$$c_0 = b_0, \; c_n + (a+n-1)\, c_{n-1} = b_n \quad (n \geqq 1),$$

so daß

$$c_n = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{n-\mu} b_\mu \cdot (a+\mu)(a+\mu+1)\cdots(a+n-1)$$

ist, wobei $(a+\mu)\cdots(a+n-1)$ für $\mu = n$ durch 1 zu ersetzen ist. Für $n = 1, 2, \ldots$ ist

$$\begin{aligned}
|c_n| &\leqq \sum_{\mu=0}^{n} |b_\mu| \cdot (|a|+\mu)(|a|+\mu+1)\cdots(|a|+n-1) \\
&= (|a|+1)\cdots(|a|+n-1)\left(|b_0|\cdot|a| + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{|b_\mu|}{(|a|+1)\cdots(|a|+\mu-1)}\right) \\
&\leqq (|a|+1)\cdots(|a|+n-1)\cdot \mathfrak{B}\left(|a| + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sigma'^{\mu}}{(\mu-1)!}\right) \\
&\leqq \mathsf{A}(|a|+1)\cdots(|a|+n-1),
\end{aligned}$$

wo A von n unabhängig ist.

Wir haben hier die ausgezeichnete Lösung

$$\eta = e^{\frac{1}{x}} x^{-a} \int_0^x \frac{h(x)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} x^a \, dx,$$

wo der Integrationsweg von $x=0$ mit $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ ausgeht, während die obere Grenze x dem Sektor $-\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$ angehört. Nach den obigen Formeln ist für $k=1$

$$\eta = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1},$$

$$\gamma_n = \int_0^\infty \sum_{\mu=0}^{\infty} g_n^{(\mu)} v^\mu \cdot e^{-w-(a+n+1)\log(1+xw)} \, dw;$$

dabei ist

$$g_n^{(0)} = c_{n+1}, \quad g_n^{(\mu)} = b_{n+\mu+1}. \qquad (\mu \geqq 1)$$

Für $|v| \leqq \mathfrak{r} < \frac{1}{\sigma}$ ist, wenn $\frac{1}{\sigma} > \frac{1}{\sigma'} > \mathfrak{r}$ angenommen wird,

$$\left| \sum_{\mu=0}^{\infty} g_n^{(\mu)} v^\mu \right| \leqq \mathsf{A}(|a|+1)\cdots(|a|+n) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{B}\sigma'^{n+\mu+1}\mathfrak{r}^\mu$$

$$= \mathsf{A}(|a|+1)\cdots(|a|+n) + \frac{\mathfrak{B}\sigma'^{n+1}}{1-\sigma'\mathfrak{r}} \leqq \mathsf{A}'(|a|+1)\cdots(|a|+n).$$

Für

$$|x| \leqq \mathfrak{r}\sin\delta', \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

wo $0 < \delta' < \pi$, $0 < \delta < \frac{3\pi}{2}$, $\delta' < \delta$ ist, ergibt sich

$$|\gamma_n| \leqq \mathsf{A}'(|a|+1)\cdots(|a|+n)(\sin\delta')^{-n} \int_0^\infty e^{-r\sin(\delta-\delta')+|a|(\log(1+\mathfrak{r}r)-\log\sin\delta'+\pi)}\,dr$$

$$\leqq \mathsf{B}(|a|+1)\cdots(|a|+n)(\sin\delta')^{-n},$$

wo B von n und x unabhängig ist.

Es gilt also der Satz:

Die Koeffizienten der Reihe S, welche die zu $k=1$ gehörige Differentialgleichung (D_1.) *formell befriedigt, erfüllen die Bedingung*

$$|c_n| \leqq \mathsf{A}(|a|+1)\cdots(|a|+n-1),$$

wo A *von* n *unabhängig ist. Wenn man*

$$\eta = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1}$$

setzt, so ist für

$$|x| \leqq \mathfrak{r}\sin\delta', \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

wo $0 < \delta' < \pi$, $0 < \delta < \frac{3\pi}{2}$, $\delta' < \delta$ *ist,*

$$|\gamma_n| \leqq \mathsf{B}(|a|+1)\cdots(|a|+n)(\sin\delta')^{-n},$$

wo B *von* n *und* x *unabhängig ist.*

Nach der *Stirling*schen Formel ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(|a|+n)}{n!\,n^{|a|-1}} = 1,$$

also

$$(|a|+1)\cdots(|a|+n-1) = \frac{\Gamma(|a|+n)}{\Gamma(|a|+1)} \leqq \mathfrak{A}\,n!\,n^{|a|-1},$$

$$(|a|+1)\cdots(|a|+n) \leqq \mathfrak{A}'\,n!\,n^{|a|}.$$

Unter den in dem obigen Satze angegebenen Bedingungen ist also

$$|c_n| \leqq \mathsf{A}'\,n!\,n^{|a|-1}, \quad |\gamma_n| \leqq \mathsf{B}'\,n!\,(\sin\delta')^{-n}\,n^{|a|},$$

wo A′ und B′ von n und x unabhängig sind. Daraus folgt, wenn unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden wird,

$$|c_n| \leqq A n! (1+\varepsilon)^n, \quad |\gamma_n| \leqq B n! \left(\frac{1+\varepsilon}{\sin \delta'}\right)^n,$$

was mit dem oben für beliebiges k bewiesenen Satze übereinstimmt.

§ 2.

Nach der *Borel-Watson*schen Theorie der asymptotischen Reihen*) läßt sich aus der Reihe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

welche der Differentialgleichung

$$(D_1.) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} + (1+ax)\, y = h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

formell genügt, ein Integral η der Differentialgleichung herleiten. Nach *Watson* ist η die einzige Funktion, welche für $|\arg x| \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$ durch die Reihe S asymptotisch dargestellt wird (wobei vorausgesetzt wird, daß der Rest das für $\gamma_n x^{n+1}$ nachgewiesene Verhalten zeigt). Die *Borel*sche assoziierte Funktion

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$$

verhält sich wegen

$$\left|\frac{c_n}{n!}\right| \leqq A(1+\varepsilon)^n$$

($\varepsilon > 0$ beliebig klein) für $|t| < 1$ regulär; auf Grund ihres Verhaltens im Unendlichen ergibt sich nach *Watson*, daß das *Laplace-Borel*sche Integral

$$\eta = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} v e^{-\frac{t}{x}} dt$$

in einem gewissen Gebiet der x-Ebene konvergiert und die Funktion η darstellt.

Wir wollen jedoch diesen Integralausdruck für η ohne Benutzung der allgemeinen Theorie der asymptotischen Reihen unmittelbar aus der Differentialgleichung ($D_1.$) herleiten; dabei ergibt sich eine Differential-

*) *Borel*, Leçons sur les séries divergentes (Paris 1901). — *Watson*, Phil. Transactions, A 211, S. 279 ff.

gleichung für die Funktion $v(t)$, aus welcher deren Verhalten hervorgeht.

Wir suchen die Differentialgleichung (D_1.) durch ein *Laplace*sches Integral

$$y = \frac{1}{x}\int_0^\infty v(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

zu befriedigen. Dabei nehmen wir an, die Funktion $v(t)$ und der geradlinige Integrationsweg ($\arg t = \omega$) seien so beschaffen, daß alle vorkommenden Integrale in einem gewissen Gebiet der x-Ebene konvergieren. Es muß also

$$\lim v e^{-\frac{t}{x}} = 0$$

sein, wenn t auf dem Integrationsweg ins Unendliche geht. Für $t = 0$ möge $v = c_0 = b_0$ sein. Man hat

$$y = -\left[v e^{-\frac{t}{x}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{dv}{dt} e^{-\frac{t}{x}}\, dt = c_0 + \int_0^\infty \frac{dv}{dt} e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

$$xy = \int_0^\infty v e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\int_0^\infty t v e^{-\frac{t}{x}}\, dt - \int_0^\infty v e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

$$= -\left[t v e^{-\frac{t}{x}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d(tv)}{dt} e^{-\frac{t}{x}}\, dt - \int_0^\infty v e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t \frac{dv}{dt} e^{-\frac{t}{x}}\, dt.$$

Wegen

$$|b_n| \leqq \mathfrak{B}\sigma'^n \quad (\sigma' > \sigma)$$

ist

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

eine ganze transzendente Funktion von t, deren absoluter Betrag höchstens gleich

$$\mathfrak{B} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma'^n |t|^{n-1}}{(n-1)!} = \mathfrak{B}\sigma' e^{\sigma'|t|}$$

ist. Es ist

$$x^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

für $|\arg x - \omega| < \frac{\pi}{2}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

falls

$$\int_0^{\infty} e^{\sigma' |t| - \Re\left(\frac{t}{x}\right)} d|t| = \int_0^{\infty} e^{\left(\sigma' - \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)|t|} d|t|$$

einen Sinn hat, d. h. für

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma'.$$

Durch Einsetzen der aufgestellten Ausdrücke in die Differentialgleichung (D_1.) erhält man

$$\int_0^{\infty} \left(t \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} + av - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n t^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{-\frac{t}{x}} dt = 0.$$

Die Differentialgleichung (D_1.) ist also erfüllt, wenn v der Differentialgleichung

$$(E.) \qquad (t+1)\frac{dv}{dt} + av = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

genügt*). Die durch die Anfangsbedingung $t = 0, v = c_0 = b_0$ bestimmte Lösung von (E.) ist

$$v = b_0 + (t+1)^{-a} \int_0^t (\tau + 1)^{a-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \tau^{n-1}}{(n-1)!} d\tau.$$

Sie läßt sich, da sie im Endlichen nur die singuläre Stelle $t = -1$ hat, in eine für $|t| < 1$ konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n.$$

Durch Koeffizientenvergleichung erhält man aus (E.) die Rekursionsformel

$$n A_n + (a + n - 1) A_{n-1} = \frac{b_n}{(n-1)!}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

während für die Koeffizienten der Reihe S die Rekursionsformel gilt:

$$c_n + (a + n - 1) c_{n-1} = b_n. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Wenn $A_0 = c_0$ angenommen wird, ist also

$$A_n = \frac{c_n}{n!}.$$

Demnach ist

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$$

---

*) Man kann (E.) als *Laplace*sche Transformierte von (D_1.) bezeichnen.

diejenige Funktion, welche sich vorhin aus der divergenten Reihe S als *Borel*sche assoziierte Funktion ergeben hat.

Wir beweisen den Satz:

In dem Sektor

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0 < \theta < \pi)$$

ist

$$|v| \leqq K e^{\sigma'|t|},$$

wo σ' eine positive Zahl größer als σ und K eine positive Konstante darstellt.

Es ist nämlich in dem genannten Sektor, der $\mathfrak{S}_\theta$ heißen möge,

$$\left|(\tau+1)^{a-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n \tau^{n-1}}{(n-1)!}\right| < P e^{\sigma''|\tau|},$$

wo $\sigma'' > \sigma'$ beliebig angenommen und P eine Konstante ist. Demnach ist

$$\left|\int_0^t (\tau+1)^{a-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n \tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau\right| < P\int_0^{|t|} e^{\sigma''|\tau|}\,d|\tau| < \frac{P}{\sigma''}\,e^{\sigma''|t|}$$

und

$$|v - b_0| < |(t+1)^{-a}| \cdot \frac{P}{\sigma''}\,e^{\sigma''|t|} < Q e^{\sigma'''|t|},$$

wo $\sigma''' > \sigma''$ beliebig zu wählen ist, während Q eine positive Konstante darstellt. Da σ''' ebenso wie σ' eine beliebige positive Zahl größer als σ ist, so kann statt σ''' wieder σ' geschrieben werden, so daß der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Wir wollen nachweisen, daß im Sektor $\mathfrak{S}_\theta$

$$\left|\frac{d^n v}{dt^n}\right| \leqq \frac{C(|a|+1)\cdots(|a|+n)}{\sin^n\theta}\,e^{\sigma'|t|}$$

ist, wo C von n und t nicht abhängt. Nachdem dies gezeigt ist, ergibt sich durch dieselbe Umformung wie am Schluß von § 1 der Satz:

In dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ ist

$$\left|\frac{d^n v}{dt^n}\right| \leqq n!\left(\frac{1+\varepsilon}{\sin\theta}\right)^n \cdot K e^{\sigma'|t|},$$

wo ε eine beliebig kleine positive Größe und K eine von n und t unabhängige Größe ist.

Setzt man

$$G(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

so ist

$$G^{(n)}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_{n+\nu+1}\,t^\nu}{\nu!},$$

also

$$|G^{(n)}(t)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{B}\,\sigma'^{n+\nu+1}|t|^{\nu}}{\nu!} = \mathfrak{B}\,\sigma'^{n+1} e^{\sigma'|t|}.$$

Durch n-malige Differentiation der Gleichung (E.) ergibt sich die Gleichung

$$(t+1)\frac{d^{n+1}v}{dt^{n+1}} + (a+n)\frac{d^n v}{dt^n} = G^{(n)}(t);$$

hiernach ist im Sektor $\mathfrak{S}_\theta$ wegen $|t+1| \geqq \sin\theta$

$$\left|\frac{d^{n+1}v}{dt^{n+1}}\right| \leqq \frac{(|a|+n)\left|\frac{d^n v}{dt^n}\right| + |G^{(n)}(t)|}{\sin\theta}.$$

Unter der Annahme

$$\left|\frac{d^n v}{dt^n}\right| \leqq \frac{C_n(|a|+1)\cdots(|a|+n)}{\sin^n\theta}\, e^{\sigma'|t|}$$

erhält man

$$\left|\frac{d^{n+1}v}{dt^{n+1}}\right| \leqq \frac{C_{n+1}(|a|+1)\cdots(|a|+n+1)}{\sin^{n+1}\theta}\, e^{\sigma'|t|},$$

$$C_{n+1} = C_n\frac{|a|+n}{|a|+n+1} + \frac{\mathfrak{B}\,\sigma'(\sigma'\sin\theta)^n}{(|a|+1)\cdots(|a|+n+1)} \leqq C_n + \frac{\mathfrak{B}\,\sigma'(\sigma'\sin\theta)^n}{n!}.$$

Demnach ist

$$C_{n+1} \leqq C_0 + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mathfrak{B}\,\sigma'(\sigma'\sin\theta)^{\nu}}{\nu!} \leqq C_0 + \mathfrak{B}\,\sigma' e^{\sigma'\sin\theta},$$

so daß alle C_n unter einer festen Größe C liegen.

Für

$$t = |t|e^{i\omega} \quad (|\omega| \leqq \pi - \theta)$$

ist

$$\left|ve^{-\frac{t}{x}}\right| \leqq Ke^{\sigma'|t|}e^{-|t|\,\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)} = Ke^{-\left(\sigma' - \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)|t|};$$

es ist

$$\lim ve^{-\frac{t}{x}} = 0 \quad \text{für} \quad \lim|t| = \infty$$

in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma'$$

oder, da σ' beliebig wenig größer als σ ist, in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma,$$

d. h. im Innern des Kreises, welcher die Verbindungsgerade der Punkte $x = 0$ und $x = \frac{e^{i\omega}}{\sigma}$ als Durchmesser hat. In diesem Gebiet ist

$$y = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} ve^{-\frac{t}{x}}\,dt$$

mit dem Integrationsweg $\arg t = \omega$ konvergent und stellt ein Integral der Differentialgleichung (D_1.) dar.

Durch wiederholte partielle Integration ergibt sich

$$\frac{1}{x}\int v e^{-\frac{t}{x}}\,dt = -\Big(v + x\frac{dv}{dt} + \cdots + x^{n+1}\frac{d^{n+1}v}{dt^{n+1}}\Big)e^{-\frac{t}{x}} + x^{n+1}\int \frac{d^{n+2}v}{dt^{n+2}}\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt.$$

Wir integrieren mit $\arg t = \omega$ ($|\omega| \leqq \pi - \theta$) von $t = 0$ bis $t = \infty$; in dem Gebiet

$$\Re\Big(\frac{e^{i\omega}}{x}\Big) > \sigma'$$

ist

$$\lim_{t=\infty} \frac{d^\nu v}{dt^\nu}\,e^{-\frac{t}{x}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und für $t = 0$ ist

$$\frac{d^\nu v}{dt^\nu} = c_\nu.$$

Demnach ist

$$y = \frac{1}{x}\int_0^\infty v e^{-\frac{t}{x}}\,dt = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\int_0^\infty \frac{d^{n+2}v}{dt^{n+2}}\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt$$

$$= c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1},$$

$$\gamma_n = c_{n+1} + \int_0^\infty \frac{d^{n+2}v}{dt^{n+2}}\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt.$$

Man hat

$$|\gamma_n| \leqq A(n+1)!(1+\varepsilon)^{n+1} + K(n+2)!\Big(\frac{1+\varepsilon}{\sin\theta}\Big)^{n+2}\int_0^\infty e^{\left(\sigma' - \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)|t|}\,d|t|$$

oder, wenn

$$\Re\Big(\frac{e^{i\omega}}{x}\Big) > \sigma'' > \sigma'$$

angenommen wird,

$$|\gamma_n| \leqq A(n+1)!(1+\varepsilon)^{n+1} + \frac{K}{\sigma'' - \sigma'}(n+2)!\Big(\frac{1+\varepsilon}{\sin\theta}\Big)^{n+2} \leqq B n!\Big(\frac{1+\varepsilon'}{\sin\theta}\Big)^n,$$

wo $\varepsilon' > \varepsilon$ und B von ω und n unabhängig ist. Unter Änderung der Bezeichnung können wir sagen:

Es ist

$$y = \frac{1}{x}\int_0^\infty v e^{-\frac{t}{x}}\,dt = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1},$$

und zwar ist, wenn auf dem Integrationsweg $\arg t = \omega$ ($|\omega| \leqq \pi - \theta$) ist, in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma' > \sigma$$

$$|\gamma_n| \leqq Bn!\left(\frac{1+\varepsilon}{\sin\theta}\right)^n,$$

wo ε eine beliebig kleine positive Größe und B eine von n und ω unabhängige Größe ist.

Läßt man ω zwischen $-\pi+\theta$ und $\pi-\theta$ variieren, so ist die Funktion y durch das *Laplace*sche Integral in der von den Kreisen $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma'$ überstrichenen Fläche dargestellt; in dieser Fläche erfüllt γ_n die angegebene Bedingung.

Die Funktion y läßt sich in der Form

$$y = \eta + ce^{\frac{1}{x}} x^{-a}$$

schreiben, wo η das früher eingeführte ausgezeichnete Integral der Differentialgleichung (D_1.) und c eine Konstante ist. Wenn x längs der positiven reellen Achse zur Null geht, ist sowohl $\lim y = c_0$ als auch $\lim \eta = c_0$, so daß $c = 0$ sein muß. Demnach ist

$$\eta = \frac{1}{x}\int_0^\infty v e^{-\frac{t}{x}}\, dt.$$

Wir fassen die Ergebnisse von § 2 in den folgenden Satz zusammen: *Zu der divergenten Reihe*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

welche die Differentialgleichung (D_1.) *formell befriedigt, gehört die Borelsche assoziierte Funktion*

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!},$$

welche der Differentialgleichung

$$(t+1)\frac{dv}{dt} + av = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

genügt. Die Funktion v hat im Endlichen nur die singuläre Stelle $t=-1$; in dem Sektor

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0 < \theta < \pi)$$

ist

$$\left|\frac{d^n v}{dt^n}\right| \leqq n!\left(\frac{1+\varepsilon}{\sin\theta}\right)^n \cdot Ke^{\sigma'|t|}, \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

wo $\sigma' > \sigma$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt sind, während K hinreichend groß und von n und t unabhängig ist. Das Laplacesche Integral

$$\eta = \frac{1}{x}\int_0^\infty v e^{-\frac{t}{x}} dt$$

erstreckt über die Gerade $\arg t = \omega$ $(|\omega| < \pi)$ *konvergiert in dem Kreise*

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma;$$

die zu $-\pi < \omega < \pi$ *gehörigen Laplaceschen Integrale stellen in der von den zugehörigen Kreisen überstrichenen Fläche das ausgezeichnete Integral* η (§ 1) *der Differentialgleichung* (D_1.) *dar.*

§ 3.

Wird

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

gesetzt, so ist

$$\sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{ph}$$

gleich k für $h = 0, \pm k, \pm 2k, \ldots$, gleich 0 für alle anderen positiven oder negativen ganzzahligen Werte von h. Wenn x dem Sektor

$$\frac{-\frac{3\pi}{2}+\delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{\frac{3\pi}{2}-\delta}{k}$$

angehört, liegt $\alpha^m x$ $(m = 0, 1, \ldots k-1)$ in dem Sektor

$$\frac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}+\delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}-\delta}{k},$$

in welchem das Integral η_m der Differentialgleichung (D.) definiert ist. Nach § 1 gelten die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_m(\alpha^m x) \backsim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (\alpha^m x)^\nu; \qquad (m = 0, 1, \ldots k-1)$$

daher ist, wenn p eine der Zahlen $0, 1, \ldots k-1$ ist,

$$\sum_{m=0}^{k-1} \alpha^{-mp}\eta_m(\alpha^m x) \backsim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu \sum_{m=0}^{k-1} \alpha^{m(\nu-p)} = k c_p x^p + k c_{p+k} x^{p+k} + k c_{p+2k} x^{p+2k} + \cdots.$$

Wenn die Bezeichnung

$$x^k = \mathfrak{x}, \quad \frac{1}{kx^p}\sum_{m=0}^{k-1} \alpha^{-mp}\eta_m(\alpha^m x) = \varphi_p(\mathfrak{x}) \qquad (m=0, 1, \ldots k-1)$$

benutzt wird, ist $\varphi_p(\mathfrak{x})$ in dem Sektor

$$-\frac{3\pi}{2}+\delta \leqq \arg \mathfrak{x} \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta$$

definiert, und es besteht die asymptotische Gleichung

$$\varphi_p(\mathfrak{x}) \sim c_p + c_{p+k}\mathfrak{x} + c_{p+2k}\mathfrak{x}^2 + \cdots.$$

Nach § 1 ist

$$|c_{p+nk}| \leqq A\,((p+nk)!)^{\frac{1}{k}}(1+\varepsilon)^{p+nk};$$

nach der *Stirling*schen Formel hat

$$\frac{((p+nk)!)^{\frac{1}{k}}}{n!\,k^n\,n^{\frac{p}{k}+\frac{1-k}{2k}}}$$

für $n=\infty$ einen endlichen Grenzwert, so daß

$$((p+nk)!)^{\frac{1}{k}} \leqq \mathsf{A}\,n!\,(k(1+\varepsilon))^n$$

ist, wo ε die frühere Bedeutung hat; es ist also, wenn $(1+\varepsilon)^{k+1} = 1+\mathfrak{e}$ gesetzt wird,

$$|c_{p+nk}| \leqq \mathfrak{A}\,n!\,(k(1+\mathfrak{e}))^n.$$

Setzt man

$$\eta_m(\alpha^m x) = c_0 + c_1(\alpha^m x) + \cdots + c_{(n+1)k+p-1}(\alpha^m x)^{(n+1)k+p-1} + \gamma^{(m)}_{(n+1)k+p-1}(\alpha^m x)\cdot(\alpha^m x)^{(n+1)k+p},$$

so ist nach § 1 für

$$|x| \leqq \mathfrak{r}\sqrt[k]{\sin\delta'},\quad \frac{-\frac{3\pi}{2}+\delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{\frac{3\pi}{2}-\delta}{k}$$

$$(0<\delta'<\pi,\ 0<\delta<\frac{3\pi}{2},\ \delta'<\delta)$$

$$|\gamma^{(m)}_{(n+1)k+p-1}(\alpha^m x)| \leqq B\,[((n+1)k+p-1)!]^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt[k]{\sin\delta'}}\right)^{(n+1)k+p-1}.$$

Es ist

$$\varphi_p(\mathfrak{x}) = c_p + c_{p+k}\mathfrak{x} + \cdots + c_{p+nk}\mathfrak{x}^n + \mathfrak{g}_{pn}\mathfrak{x}^{n+1},$$

$$\mathfrak{g}_{pn} = \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\alpha^{-mp}\gamma^{(m)}_{(n+1)k+p-1}(\alpha^m x).$$

Für

$$|\mathfrak{x}| \leqq \mathfrak{r}^k \sin\delta',\quad -\frac{3\pi}{2}+\delta \leqq \arg\mathfrak{x} \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta$$

hat man

$$|\mathfrak{g}_{pn}| \leqq B\,[((n+1)k+p-1)!]^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt[k]{\sin\delta'}}\right)^{(n+1)k+p-1};$$

es ist aber

$$[((n+1)\,k+p-1)!]^{\frac{1}{k}} = [(k+p-1+nk)!]^{\frac{1}{k}} \leqq \mathsf{B}\,n!\,k(1+\varepsilon))^n,$$

also

$$|\mathfrak{g}_{pn}| \leqq \mathfrak{B} n! \left(\frac{k(1+\mathfrak{e})}{\sin \delta'}\right)^n.$$

Wenn man die zu $p = 0, 1, \ldots k-1$ gehörigen Gleichungen

$$x^p \varphi_p(\mathfrak{x}) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{-jp} \eta_j(\alpha^j x)$$

mit α^{mp} multipliziert und addiert, erhält man

$$\sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{mp} x^p \varphi_p(\mathfrak{x}) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j(\alpha^j x) \sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{(m-j)p} = \eta_m(\alpha^m x).$$

Es gelten also die Gleichungen

$$\eta_m(\alpha^m x) = \sum_{p=0}^{k-1} (\alpha^m x)^p \varphi_p(\mathfrak{x}). \qquad (m=0, 1, \ldots k-1)$$

Auf die asymptotischen Reihen für die Funktionen $\varphi_p(\mathfrak{x})$ könnte man die *Borel-Watson*sche Theorie anwenden; man würde so zu *Laplace*schen Integralen für die φ_p und somit auch zu Integralausdrücken für die η_m gelangen. Wir wollen jedoch Differentialgleichungen für die Funktionen $\varphi_p(\mathfrak{x})$ aufstellen und daraus unmittelbar *Laplace*sche Integrale herleiten.

Ersetzt man in der Differentialgleichung (D.) x durch $\alpha^m x$ $(m = 0, \ldots k-1)$ und $y(x)$ durch $\eta_m(\alpha^m x)$, so hat man die Gleichung

$$x^{k+1} \frac{d\eta_m(\alpha^m x)}{dx} + (1 + a_1 \alpha^m x + \cdots + a_k \alpha^{mk} x^k) \eta_m(\alpha^m x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha^{mn} x^n.$$

Indem man die Definitionsgleichung von $\varphi_p(\mathfrak{x})$ differenziert, erhält man

$$k\mathfrak{x}^2 \frac{d\varphi_p}{d\mathfrak{x}} = \frac{1}{kx^p} \sum_{m=0}^{k-1} \alpha^{-mp} x^{k+1} \frac{d\eta_m(\alpha^m x)}{dx} - \frac{p}{k} x^{k-p} \sum_{m=0}^{k-1} \alpha^{-mp} \eta_m(\alpha^m x).$$

Benutzt man die vorangehende Gleichung und drückt man die η_m durch die φ_p aus, so ergibt sich

$$k\mathfrak{x}^2 \frac{d\varphi_p}{d\mathfrak{x}} = -(1 + (a_k + p)\mathfrak{x})\varphi_p - a_1 \varphi_{p-1} - \cdots - a_p \varphi_0$$
$$- a_{p+1}\mathfrak{x}\varphi_{k-1} - \cdots - a_{k-1}\mathfrak{x}\varphi_{p+1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{p+nk}\mathfrak{x}^n.$$

Demnach stellen die Funktionen φ_p von $\mathfrak{x}$ eine Lösung der Differentialgleichungen dar:

$$(\mathfrak{D}.) \begin{cases} k\mathfrak{x}^2 \frac{d\mathfrak{y}_p}{d\mathfrak{x}} + (1 + (a_k + p)\mathfrak{x})\mathfrak{y}_p + a_1 \mathfrak{y}_{p-1} + \cdots + a_p \mathfrak{y}_0 + a_{p+1}\mathfrak{x}\mathfrak{y}_{k-1} + \cdots \\ \qquad + a_{k-1}\mathfrak{x}\mathfrak{y}_{p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{p+nk}\mathfrak{x}^k. \qquad (p=0, 1, \ldots k-1) \end{cases}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{y}_p = \frac{1}{\mathfrak{x}} \int_0^{\infty} v_p(t) e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}} dt, \qquad (p=0, 1, \ldots k-1)$$

wo $\mathfrak{v}_p(0) = c_p$ sein möge. Beachtet man, daß wie in § 2

$$\mathfrak{y}_p = c_p + \int_0^\infty \frac{d\mathfrak{v}_p}{dt} e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

$$x\mathfrak{y}_p = \int_0^\infty \mathfrak{v}_p e^{-\frac{t}{x}} dt, \qquad x^2 \frac{d\mathfrak{y}_p}{dx} = \int_0^\infty t \frac{d\mathfrak{v}_p}{dt} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

ist und berücksichtigt man die Relation

$$c_p + a_1 c_{p-1} + \cdots + a_p c_0 = b_p,$$

so sieht man, daß die Differentialgleichungen (𝔇.) erfüllt sind, wenn die Funktionen $\mathfrak{v}_p$ von t den Differentialgleichungen

$$(\mathfrak{E}.) \quad \begin{cases} (kt+1)\frac{d\mathfrak{v}_p}{dt} + (a_k + p)\mathfrak{v}_p + a_1 \frac{d\mathfrak{v}_{p-1}}{dt} + \cdots + a_p \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} \\ + a_{p+1}\mathfrak{v}_{k-1} + \cdots + a_{k-1}\mathfrak{v}_{p+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{p+nk} t^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases} \quad (p=0, 1, \ldots k-1)$$

genügen und die Anfangsbedingungen $t=0$, $\mathfrak{v}_p = c_p$ erfüllen. Die Funktionen $\mathfrak{v}_p$ haben im Endlichen die einzige singuläre Stelle $t = -\frac{1}{k}$; es gelten, wie man durch Einsetzen in (𝔈.) bestätigt, die für $|t| < \frac{1}{k}$ konvergenten Potenzreihen

$$\mathfrak{v}_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{p+nk} t^n}{n!}. \qquad (p=0, 1, \ldots k-1)$$

Hiernach hätte sich $\mathfrak{v}_p$ aus der asymptotischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{p+nk} x^n$$

für die Funktion φ_p als *Borel*sche assoziierte Funktion herleiten lassen.

Wir wollen das Verhalten der Funktionen $\mathfrak{v}_p$ in dem Sektor

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0 < \theta < \pi)$$

untersuchen.

Das System homogener linearer Differentialgleichungen

$$(kt+1)\frac{d\mathfrak{v}_p}{dt} + (a_k + p)\mathfrak{v}_p + a_1 \frac{d\mathfrak{v}_{p-1}}{dt} + \cdots + a_p \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}$$
$$+ a_{p+1}\mathfrak{v}_{k-1} + \cdots + a_{k-1}\mathfrak{v}_{p+} = 0 \qquad (p=0, 1, \ldots k-1)$$

hat die singuläre Stelle der Bestimmtheit $t = \infty$; die zugehörige determinierende Gleichung hat die Wurzeln

$$r_q = -\frac{a_k + q}{k}. \qquad (q=0, 1, \ldots, k-1)$$

Es ist demnach ein Fundamentalsystem

$$\mathfrak{v}_{pq} = t^{r_q}\,\mathfrak{V}_{pq} \qquad (p, q = 0, 1, \ldots k-1)$$

vorhanden, wo $\mathfrak{V}_{pq}$ eine für $|t| > \frac{1}{k}$ konvergente Potenzreihe von $\frac{1}{t}$ darstellt. Die Funktionen $\mathfrak{v}_{pq}$ sind durch analytische Fortsetzung in dem Sektor $\mathfrak{S}_\theta$ eindeutig definiert. Die Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta = |\mathfrak{v}_{pq}| \qquad (p, q = 0, 1, \ldots k-1)$$

seien Δ_{pq}. Die Funktionen

$$\mathfrak{w}_{pq} = \frac{\Delta_{pq}}{\Delta} \qquad (p, q = 0, 1, \ldots k-1)$$

verhalten sich außer in $t = -\frac{1}{k}$ und $t = \infty$ überall regulär. Für $|t| > \frac{1}{k}$ ist

$$\mathfrak{w}_{pq} = t^{-r_q-1}\,\mathfrak{W}_{pq},$$

wo $\mathfrak{W}_{pq}$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{t}$ darstellt.

Nach der Methode der Variation der Konstanten ergibt sich die Lösung des Systems ($\mathfrak{E}$.)

$$\mathfrak{v}_p = \sum_{q=0}^{k-1} \mathfrak{c}_q \mathfrak{v}_{pq} + \sum_{q=0}^{k-1} \mathfrak{v}_{pq} \int_0^t \sum_{j=0}^{k-1} \mathfrak{w}_{jq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{j+nk} t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt; \qquad (p = 0, 1, \ldots k-1)$$

die Konstanten $\mathfrak{c}_q$ werden so bestimmt, daß $\mathfrak{v}_p = c_p$ für $t = 0$ wird; der Integrationsweg ist die Verbindungsgerade des Nullpunktes mit dem im Sektor $\mathfrak{S}_\theta$ gelegenen Punkt $t = |t|\,e^{i\omega}$. Wird zunächst $|t| \leqq R$ angenommen, wo $R > \frac{1}{k}$ endlich ist, so ergibt sich $|\mathfrak{v}_p| \leqq K$, wo K eine endliche positive Größe darstellt. Für $|t| > R$ erhält man, wenn man den reellen Teil von r_q mit α_q bezeichnet und die Beziehung $\alpha_{k-1} \leqq \alpha_q \leqq \alpha_0$ berücksichtigt,

$$|\mathfrak{v}_{pq}| < \mathfrak{A}\,|t|^{\alpha_0}, \quad |\mathfrak{w}_{pq}| < \mathfrak{B}\,|t|^{-\alpha_{k-1}-1};$$

ferner ist

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{j+nk} t^{n-1}}{(n-1)!} \right| < \mathfrak{C} e^{\sigma' k |t|} \qquad (\sigma' > \sigma).$$

Wenn man die in $\mathfrak{v}_p$ enthaltenen von 0 bis t erstreckten Integrale in Integrale von 0 bis $Re^{i\omega}$ und Integrale von $Re^{i\omega}$ bis $t = |t|\,e^{i\omega}$ zerlegt, hat man

$$|\mathfrak{v}_p| \leqq \mathfrak{D}\,|t|^{\alpha_0} + \mathfrak{E}\,|t|^{\alpha_0} \int_R^{|t|} |t|^{-\alpha_{k-1}-1} e^{\sigma' k |t|}\, d|t|,$$

und wie in § 2 findet man weiter

$$|\mathfrak{v}_p| \leqq \mathfrak{F} e^{\sigma'' k |t|} \qquad (\sigma'' > \sigma').$$

Unter Zusammenfassung der Fälle $|t| \leqq R$ und $|t| > R$ kann man sagen:

In dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ ist

$$|\mathfrak{v}_p| \leqq K e^{\sigma' k |t|},$$

wo $\sigma' > \sigma$ und K eine Konstante ist.

Weiter gilt der Satz:

In dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ ist

$$\left|\frac{d^n \mathfrak{v}_p}{dt^n}\right| \leqq n! \left(\frac{k(1+\mathfrak{e})}{\sin\theta}\right)^n \cdot K e^{\sigma' k |t|},$$

wo $\mathfrak{e}$ eine beliebig kleine positive Zahl und K eine von t und n unabhängige Größe ist.

Durch n-malige Differentiation von (E.) erhält man, wenn

$$\mathfrak{G}_p(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_{p+(\nu+1)k} t^\nu}{\nu!}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(kt+1)\frac{d^{n+1}\mathfrak{v}_p}{dt^{n+1}} + (a_k + p + nk)\frac{d^n \mathfrak{v}_p}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n+1}\mathfrak{v}_{p-1}}{dt^{n+1}} + \cdots + a_p \frac{d^{n+1}\mathfrak{v}_0}{dt^{n+1}} + a_{p+1}\frac{d^n \mathfrak{v}_k}{dt^n} + \cdots + a_{k-1}\frac{d^n \mathfrak{v}_{p+1}}{dt^n} = \mathfrak{G}_p^{(n)}(t).$$

Beachtet man, daß

$$|\mathfrak{G}_p^{(n)}(t)| \leqq \mathfrak{B}\sigma'^{p+(n+1)k} e^{\sigma' k |t|}$$

und daß im Sektor $\mathfrak{S}_\theta$

$$|kt+1| \geqq \sin\theta$$

ist, so ergibt sich

$$\sin\theta \left|\frac{d^{n+1}\mathfrak{v}_p}{dt^{n+1}}\right| \leqq (|a_k| + p + nk)\left|\frac{d^n \mathfrak{v}_p}{dt^n}\right| + |a_1| \cdot \left|\frac{d^{n+1}\mathfrak{v}_{p-1}}{dt^{n+1}}\right| + \cdots + |a_{p+1}| \cdot \left|\frac{d^n \mathfrak{v}_k}{dt^n}\right| + \cdots + \mathfrak{B}\sigma'^{p+(n+1)k} e^{\sigma' k |t|}.$$

Setzt man

$$\left|\frac{d^n \mathfrak{v}_p}{dt^n}\right| = ((p+nk)!)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1+\varepsilon}{\sin\theta}\right)^n Q_n^{(p)} e^{\sigma' k |t|},$$

so ist

$$Q_{n+1}^{(p)} \leqq \frac{|a_k| + p + nk}{((p+1+nk)\cdots(p+k+nk))^{\frac{1}{k}}} \frac{Q_n^{(p)}}{1+\varepsilon} + \frac{|a_1|}{(p+(n+1)k)^{\frac{1}{k}}} \frac{Q_{n+1}^{(p-1)}}{\sin\theta} + \cdots + \frac{|a_{p+1}|}{((1+(n+1)k)\cdots(p+(n+1)k)^{\frac{1}{k}}} \frac{Q_n^{(k-1)}}{1+\varepsilon} + \cdots + \frac{\mathfrak{B}\sigma'^{p+(n+1)k}\sin^n\theta}{((p+(n+1)k)!)^{\frac{1}{k}} \cdot (1+\varepsilon)^{n+1}}.$$

Wenn man die Summe der Koeffizienten von $Q_n^{(p)}$, $Q_{n+1}^{(p-1)}, \ldots Q_n^{(k-1)}, \ldots$ und $\mathfrak{B}$ auf der rechten Seite mit P bezeichnet, so ist

$$\lim_{n=\infty} P = \frac{1}{1+\varepsilon};$$

also ist $P < 1$ für $n \geqq n_0$ (n_0 hinreichend groß). Wenn die Größen

$Q_n^{(0)}, \dots Q_n^{(k-1)}$; $Q_{n+1}^{(0)}, \dots Q_{n+1}^{(p-1)}$ $(n \geqq n_0)$ und $\mathfrak{B}$ höchstens gleich C sind, so ist auch $Q_{n+1}^{(p)} \leqq C$. Nach dem vorausgehenden Satze liegt $Q_0^{(p)}$ unter einer von t unabhängigen endlichen Größe, und nach der obigen Formel liegt auch $Q_n^{(p)}$ $(n \leqq n_0)$ unter einer endlichen Größe C.

Wegen

$$((p+nk)!)^{\frac{1}{k}} \leqq \mathsf{A} n! \, (k(1+\varepsilon))^n \quad \text{und} \quad |Q_n^{(p)}| \leqq C$$

ist im Sektor $\mathfrak{S}_\vartheta$

$$\left| \frac{d^n \mathfrak{v}_p}{dt^p} \right| \leqq n! \left(\frac{k(1+\varepsilon)}{\sin \theta} \right)^n \cdot K e^{\sigma' k |t|}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wie in § 2 sieht man, daß die über die Gerade $\arg t = \omega$ $(|\omega| \leqq \pi - \theta)$ erstreckten Integrale

$$\mathfrak{y}_p = \frac{1}{\mathfrak{x}} \int_0^\infty \mathfrak{v}_p e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}} dt \qquad (p=0, 1, \dots k-1)$$

für

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{\mathfrak{x}}\right) > \sigma$$

konvergent sind und den Differentialgleichungen (D.) genügen. Nach dem in § 2 benutzten Verfahren erhält man für das *Laplace*sche Integral dieselbe asymptotische Darstellung, welche sich oben für die Funktion φ_p ergeben hat. Nach einem Satze von *Watson**), wonach unter gewissen Voraussetzungen nur eine einzige Funktion mit einer gegebenen asymptotischen Darstellung vorhanden ist, ist $\mathfrak{y}_p = \varphi_p$, also

$$\varphi_p = \frac{1}{\mathfrak{x}} \int_0^\infty \mathfrak{v}_p e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}} dt.$$

Wir fassen die Ergebnisse von § 3 folgendermaßen zusammen.

Die Integrale η_m der Differentialgleichung (D.) *lassen sich vermittels der Gleichungen*

$$\eta_m(\alpha^m x) = \sum_{p=0}^{k-1} (\alpha^m x)^p \varphi_p(\mathfrak{x}), \qquad (m=0, 1, \dots k-1)$$

die für

$$\frac{-\frac{3\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{\frac{3\pi}{2} - \delta}{k}$$

gelten und worin $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ gesetzt ist, durch k Funktionen φ_p $(p=0, 1, \dots k-1)$ von $\mathfrak{x} = x^k$ ausdrücken. . Für

---

*) Phil. Trans. A. 211, S. 300.

$|\xi| \leqq \mathfrak{r}^k \sin\delta' \left(\mathfrak{r} < \frac{1}{\sigma}\right)$, $|\arg \xi| \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta \quad \left(0 < \delta' < \pi, 0 < \delta < \frac{3\pi}{2}, \delta' < \delta\right)$

ist

$$\varphi_p = c_p + c_{p+k}\xi + \cdots + c_{p+nk}\xi^n + \mathfrak{g}_{pn}\xi^{n+1},$$

$$|c_{p+nk}| \leqq \mathfrak{A} n! (k(1+\mathfrak{e}))^n, \quad |\mathfrak{g}_{pn}| \leqq \mathfrak{B} n! \left(\frac{k(1+\mathfrak{e})}{\sin\delta'}\right)^n,$$

wo $\mathfrak{e} > 0$ *beliebig klein ist und* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *von* ξ *und* n *unabhängige positive Größen sind.*

Die Borelschen assoziierten Funktionen

$$\mathfrak{v}_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{p+nk} t^n}{n!} \qquad (p = 0, 1, \ldots k-1)$$

genügen den Differentialgleichungen (E.). *Sie haben im Endlichen nur die singuläre Stelle* $t = -\frac{1}{k}$; *in dem Sektor* $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ *ist*

$$\left|\frac{d^n \mathfrak{v}_p}{dt^n}\right| \leqq n! \left(\frac{k(1+\mathfrak{e})}{\sin\theta}\right)^n \cdot K e^{\sigma' k|t|},$$

wo $\sigma' > \sigma$ *und* $\mathfrak{e} > 0$ *beliebig gewählt werden können und die positive Größe* K *von* t *und* n *unabhängig ist. Das über die Gerade* $\arg t = \omega$ $(|\omega| < \pi)$ *erstreckte Laplacesche Integral*

$$\frac{1}{\xi} \int_0^{\infty} \mathfrak{v}_p e^{-\frac{t}{\xi}} dt,$$

welches für

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{\xi}\right) > \sigma$$

konvergiert, stellt die oben eingeführte Funktion φ_p *dar.*

§ 4.

In § 2 wurde das Integral η der Differentialgleichung (D_1.) als *Laplace*sches Integral dargestellt:

$$\eta = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} v(t) e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich eine Entwicklung der Funktion η in eine *konvergente Fakultätenreihe*, indem man ebenso verfährt, wie ich es in § 2 und § 3 meiner Arbeit im 71. Bd. der Math. Ann. für die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung m-ter Ordnung getan habe, deren Koeffizienten ganze Funktionen p-ten Grades sind. In § 3 wurden die Integrale η_m $(m = 0, 1, \ldots k-1)$ der Differentialgleichung (D.) auf k Funktionen φ_p $(p = 0, 1 \ldots k-1)$ der Veränderlichen $\xi = x^k$ zurückgeführt, welche sich als *Laplace*sche Integrale

$$\varphi_p = \frac{1}{\mathfrak{x}} \int_0^\infty \mathfrak{v}_p(t) e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}} dt$$

schreiben lassen und in *konvergente Fakultätenreihen* entwickelt werden können*).

Fakultätenreihen für unsere Funktionen η und η_m lassen sich auch aufstellen, indem man von der Abhandlung von *Watson* über die *Verwandlung einer asymptotischen Reihe in eine konvergente Fakultätenreihe***) Gebrauch macht. Wir wollen den zweiten der drei von *Watson* ausgesprochenen Sätze***) auf eine für unseren Zweck geeignete Form bringen. Es ergibt sich so ein größeres Konvergenzgebiet für die aufzustellenden Fakultätenreihen als nach der zuerst erwähnten Methode.

Der Satz II von *Watson* lautet;

Die Funktion $f(z)$ sei sowohl für $\Re(z) > 0$ als auch für $|z| \geqq \gamma$, $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda \left(0 < \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$ regulär; für

$$|z| \geqq \gamma, \quad |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$$

gelte die asymptotische Entwicklung

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + R_n, \quad \text{wo} \quad |a_n| < A\varrho^n \cdot n!, \quad |R_n z^{n+1}| < B\sigma^n \cdot n!$$

ist (A, B, ϱ, σ von n unabhängig). Dann kann $f(z)$ in eine für $\Re(z) > 0$ absolut konvergente Fakultätenreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(Mz+a+1)(Mz+a+2)\cdots(Mz+a+n)}$$

entwickelt werden; M ist eine hinreichend kleine positive Zahl†) und a eine beliebige komplexe Zahl mit nicht negativem reellen Teil.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, daß $f(z)$ für $\Re(z) > 0$ regulär sei, fallen; wir nehmen nur an, $f(z)$ sei in dem Gebiet

$$|z| \geqq \gamma, \quad |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda \quad \left(0 < \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$$

regulär, und es sei in diesem Gebiet

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + R_n, \quad |a_n| < A\varrho^n \cdot n!, \quad |b_n| < B\sigma^n \cdot n!.$$

Die Funktion $g(z) = f(z+\mu)$, wo $\mu \geqq \gamma$ eine positive Zahl ist, ist für $|z+\mu| \geqq \gamma$, $|\arg(z+\mu)| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$ regulär. Dann ist $g(z)$ sicher sowohl

---

*) Vgl. § 5 meiner Arbeit im 71. Bd. der Math. Ann.

**) Rend. del Circ. Mat. di Palermo, Bd. 34, S. 1 ff.

***) A. a. O., S. 4—7.

†) Näheres über M a. a. O., S. 5.

für $\Re(z) > 0$ als auch in dem Gebiet $|z| \geqq \mu + \gamma$, $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$ regulär, denn in diesem Gebiet ist $|z+\mu| \geqq |z| - \mu \geqq \gamma$, $|\arg(z+\mu)| \leqq |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$, und für $\Re(z) > 0$ ist $|\arg(z+\mu)| \leqq \frac{\pi}{2}$ und $\Re(z+\mu) > \mu \geqq \gamma$, also auch $|z+\mu| \geqq \gamma$. Für

$$|z+\mu| \geqq \gamma, \quad |\arg(z+\mu)| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$$

ist

$$g(z) = f(z+\mu) = a_0 + \frac{a_1}{z+\mu} + \cdots + \frac{a_n}{(z+\mu)^n} + R_n,$$
$$|a_n| < A\varrho^n \cdot n!, \quad |R_n \cdot (z+\mu)^{n+1}| < B\sigma^n \cdot n!.$$

Nach einem Satze von *Watson**) ist für

$$|z| \geqq \mu + \gamma, \quad |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$$
$$g(z) = a_0' + \frac{a_1'}{z} + \cdots + \frac{a_n'}{z^n} + R_n',$$
$$a_n' = a_n - \binom{n-1}{1}\mu a_{n-1} + \binom{n-1}{2}\mu^2 a_{n-2} - \cdots.$$
$$|a_n'| < A(\varrho+\mu)^n \cdot n!, \quad |R_n' z^{n+1}| < B'\sigma'^n \cdot n!,$$

wo B' und σ' von n unabhängig sind. Nach dem oben ausgesprochenen Satz II von *Watson* gilt also für $\Re(z) > 0$ die absolut konvergente Entwicklung

$$g(z) = f(z+\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(Mz+a+1)\cdots(Mz+a+n)},$$

wo $\Re(a) \geqq 0$ und M eine hinreichend kleine positive Größe ist. Für $\Re(z-\mu) > 0$ oder $\Re(z) > \mu$ besteht die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(M(z-\mu)+a+1)\cdots(M(z-\mu)+a+n)},$$

in welcher $a = M\mu$ gesetzt werden kann.

Wir können demnach, indem wir $\mu = \gamma$ setzen, den Satz aussprechen:

„Die Funktion $f(z)$ sei in dem Gebiet

$$|z| \geqq \gamma, \quad |\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda \qquad \left(0 < \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$$

regulär, und es sei in diesem Gebiet

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + R_n, \quad |a_n| < A\varrho^n \cdot n!, \quad |R_n z^{n+1}| < B\sigma^n \cdot n!,$$

wo A, B, ϱ, σ von n unabhängig sind. Dann gilt für $\Re(z) > \gamma$ eine konvergente Entwicklung

---

*) Phil. Tr. A. 211, S. 293—295.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(Mz+1)\cdots(Mz+n)},$$

wo M eine hinreichend kleine positive Größe ist."

Das Integral η der Differentialgleichung $(D_1.)$ gestattet nach § 1, wenn $\mathfrak{r} < \frac{1}{\sigma}$ angenommen wird, für

$$|x| \leqq \mathfrak{r} \sin\delta', \quad |\arg x| \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta \left(0 < \delta' < \pi, \quad 0 < \delta < \frac{3\pi}{2}, \ \delta' < \delta\right)$$

die asymptotische Darstellung

$$\eta = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^{n+1},$$
$$|c_n| \leqq A n! (1+\varepsilon)^n, \quad |\gamma_n| \leqq B n! \left(\frac{1+\varepsilon}{\sin\delta'}\right)^n.$$

Es sei zunächst

$$|\omega| < \frac{\pi}{2}.$$

Wir nehmen $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi - |\omega|$ und $\delta = \pi - |\omega| - \lambda$ an, so daß $\delta > \frac{1}{2}\pi$ ist und $\delta' = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt werden kann. Dann ist

$$|\omega| + \frac{\pi}{2} + \lambda = \frac{3\pi}{2} - \delta, \quad -|\omega| + \frac{\pi}{2} + \lambda \leqq |\omega| + \frac{\pi}{2} + \lambda = \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

und das Gebiet

$$|\arg x - \omega| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$$

liegt innerhalb des Gebietes

$$|\arg x| \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta.$$

Die obige asymptotische Darstellung gilt also für

$$|x| \leqq \mathfrak{r}, \quad |\arg x - \omega| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$$

oder, wenn $x = x' e^{i\omega}$ gesetzt wird, für

$$|x'| \leqq \mathfrak{r}, \quad |\arg x'| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda.$$

Die Voraussetzungen des vorhin ausgesprochenen Satzes sind erfüllt, wenn man darin z durch $\frac{1}{x'}$, γ durch $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ ersetzt, so daß für $\Re\left(\frac{1}{x'}\right) > \frac{1}{\mathfrak{r}}$ die konvergente Fakultätsreihenentwicklung

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\left(\frac{M}{x'}+1\right)\cdots\left(\frac{M}{x'}+n\right)}$$

besteht, wo M unter einer (von ω abhängigen) hinreichend kleinen positiven Zahl M_0 liegt, während die C_n von M und ω abhängen. Für

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\mathfrak{r}},$$

d. h. innerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $x = \frac{\mathfrak{r}}{2} e^{i\omega}$ und dem Radius $\frac{\mathfrak{r}}{2}$ ist also

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\left(\frac{M e^{i\omega}}{x} + 1\right) \cdots \left(\frac{M e^{i\omega}}{x} + n\right)}.$$

Ferner sei

$$\frac{\pi}{2} \leqq |\omega| < \pi.$$

Wir nehmen $0 < \lambda < \lambda' < \pi - |\omega| \leqq \frac{1}{2}\pi$ an, so daß, wenn $\delta = \pi - |\omega| - \lambda$, $\delta' = \pi - |\omega| - \lambda'$ gesetzt wird, $0 < \delta' < \delta < \frac{1}{2}\pi$ ist. Dann ist

$$|\omega| + \frac{\pi}{2} + \lambda = \frac{3\pi}{2} - \delta, \quad -|\omega| + \frac{\pi}{2} + \lambda < |\omega| + \frac{\pi}{2} + \lambda = \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

so daß wieder das Gebiet

$$|\arg x - \omega| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$$

innerhalb des Gebietes

$$|\arg x| \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

liegt. Unsere asymptotische Darstellung gilt für

$$|x| \leqq \mathfrak{r} \sin(\omega + \lambda'), \quad |\arg x - \omega| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda$$

oder, wenn wieder $x = x' e^{i\omega}$ gesetzt wird, für

$$|x'| \leqq \mathfrak{r} \sin(\omega + \lambda'), \quad |\arg x'| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda.$$

Wir erhalten eine für

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\mathfrak{r} \sin(\omega + \lambda')}$$

gültige Fakultätenreihenentwicklung von η von derselben Form wie im Falle $|\omega| < \frac{\pi}{2}$.

Die Integrale η_m $(m = 0, 1, \ldots k-1)$ der Differentialgleichung (D.) sind in § 3 auf k Funktionen φ_p $(p = 0, 1, \ldots k-1)$ von $\mathfrak{x} = x^k$ zurückgeführt worden. Aus den asymptotischen Reihen für die Funktionen φ_p von $\mathfrak{x}$ werden konvergente Fakultätenreihen für diese Funktionen ebenso hergeleitet, wie dies für die Funktion η von x gezeigt wurde.

Existenzbeweis des Punktes kleinster Entfernungssumme von vier gegebenen Punkten.

Von Herrn *Rudolf Sturm* in Breslau.

Mit diesem Punkte habe ich mich vor längerer Zeit in diesem Journal, Bd. 97, S. 49 (1884), beschäftigt und neuerdings wiederum in § 8 meines Buches: Maxima und Minima in der elementaren Geometrie (*B. G. Teubner*, 1910), zitiert mit „Max. und Min.“.

Die Hauptergebnisse waren:

Wenn eine Ecke des Tetraeders der vier Punkte einen Exzeß (Überschuß der Summe der Flächenwinkel über 180^0) *besitzt, welcher* $\geqq 180^0$, *so ist ihr Scheitel der Punkt kleinster Entfernungssumme**).

Im andern Falle ist für einen solchen Punkt M erforderlich, daß er so im Innern liege, daß die Halbstrahlen (*Kanten*) *nach den vier Punkten einen „Vierstrahl“ von folgender Eigenschaft bilden: Sind* a, b, c, d *die vier Kanten* $MA, \ldots$, *so sind die Winkel* ab *und* cd, ac *und* bd, ad *und* bc *je gleich und haben die beiden Halbstrahlen derselben Gerade zu Halbierungslinien, und diese drei Halbierungslinien sind zueinander rechtwinklig.* In „Max. und Min.“ S. 65, 66 ist erörtert, wie ein solcher Vierstrahl aus einem Winkel und dem durch Rotation seines Scheitelwinkels um die gemeinsame Halbierungslinie (bei beliebigem Drehwinkel) sich ergebenden Winkel entsteht, und gezeigt, daß er sich aus vier dreikantigen Ecken vom Exzesse 180^0 zusammensetzt, die in folgender Weise deckbar kongruent sind:

$$abc \cong bad \cong cda \cong dcb.$$

*) In „Max. und Min.“ S. 68 ist bewiesen, daß höchstens eine Ecke eines Tetraeders einen Exzeß, der $\geqq 180^0$ ist, haben kann.

Wenn also die ausgezeichnete dreikantige Ecke mit dem Exzeß 180^0 mit E_π bezeichnet wird, so kann der Vierstrahl $(4E_\pi)$ genannt werden.

Ein solcher Punkt M hat kleinere Entfernungssumme als jeder andere Punkt. („Max. und Min." S. 56.)

Daß im zweiten Falle ein Punkt M existiert, kann nicht als selbstverständlich angenommen werden. Bei der Abfassung des Aufsatzes von 1884 habe ich mir die reelle Existenz klar gemacht, aber damals, um ihn abzukürzen, diesen Beweis unterdrückt und mich auf die Bemerkung beschränkt, daß die Existenz bewiesen werden könne.

Es scheint mir heute jedoch, daß *die Betrachtung dieses Punktes, wenn nicht ein Beweis seiner Existenz vorliegt, nur geringeren Wert hat,* und ich veröffentliche deshalb jenen Beweis in vereinfachter Gestalt.

1. Wir haben zunächst die Ecke E_π noch genauer zu untersuchen. Wenn α, β, γ ihre Kantenwinkel sind, so ist

$$\Delta = 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0.$$

Denn ist ε der Exzeß, so besteht die Formel

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\Delta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}\text{*)}.$$

Daraus folgt, daß zu

$$\varepsilon < 180^0,\ = 180^0,\ > 180^0$$

gehört

$$\Delta > 0,\ = 0,\ < 0,$$

da die drei Cosinusse größer als 0 sind.

Wenn a der α gegenüberliegende Flächenwinkel ist, so wird wegen

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

$$\Delta = (1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) + \sin\beta\sin\gamma\cos a = 0,$$

also nach Division mit $\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\ (>0)$:

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos a = 0$$

und

$$\cos a = -\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Die Ecke mit der Kante a und den Halbierungslinien von β, γ als Kanten, in welcher α' dem a gegenüberliegt, liefert

$$\cos\alpha' = \cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos a = 0,$$

also $\alpha' = 90^0$ und ebenso $\beta' = 90^0$, $\gamma' = 90^0$.

---

*) Z. B. *Baltzer*, Elem. der Math., 3. Aufl., Trig. 5, 13.

Die drei Halbierungslinien der Kantenwinkel einer Ecke E_π sind rechtwinklig zueinander.

Ferner sei γ'' der Winkel von der Kante c nach der Halbierungslinie von γ, so ist

$$\cos\gamma'' = \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos a,$$

also wegen des obigen Wertes von $\cos a$

$$\cos\gamma'' = \cos\tfrac{1}{2}\gamma(\cos\beta - 2\cos\tfrac{1}{2}\beta^2) = -\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Die Halbierungslinie des Winkels zweier Kanten einer Ecke E_π bildet mit der dritten Kante das Supplement des Winkels, den sie mit jenen Kanten bildet, der ergänzende Halbstrahl also diesen Winkel selbst.

Und umgekehrt, wenn einmal zwei Halbierungslinien von Kantenwinkeln rechtwinklig zueinander sind, so ist es auch die dritte zu ihnen; und wenn einmal die eben erwähnte Winkelgleichheit statt hat, so findet sie auch in den beiden andern Fällen statt. Es handelt sich um eine Ecke E_π.

Ist dann bei einer Ecke E_π die vierte Kante d so gezogen, daß der ergänzende Halbstrahl der Halbierungslinie des Winkels ab den Winkel cd halbiert, so bilden a, b, c, d einen Vierstrahl $(4E_\pi)$; denn cd ist durch Rotation des Scheitelwinkels von ab um die Halbierungslinie entstanden.

2. Wir betrachten *den Ort der Punkte P, von denen Ecken nach A, B, C gehen, welche E_π sind;* wir wollen uns jedoch nur mit demjenigen Teile desselben beschäftigen, der innerhalb des geraden prismatischen Raumes über dem Dreieck ABC sich befindet. *Er besteht aus zwei zueinander in bezug auf die Ebene ABC symmetrischen Hälften, die in den begrenzten Seiten BC, CA, AB zusammenstoßen; in allen Punkten einer solchen Seite ist die betreffende Ebene des prismatischen Raumes Berührungsebene.* Für einen Punkt P auf AB nehmen wir diese Ebene als PAB und haben dann eine Ecke mit den Flächenwinkeln 180^0, 90^0, 90^0, also dem Exzesse 180^0. Die Verbindungslinien symmetrischer Punkte gehen in Tangenten über, die zu ABC normal sind. Liegt P sehr nahe an AB, so ist die Halbierungslinie von APB nahezu rechtwinklig auf ABC, weil rechtwinklig zu den beiden andern.

Wir nehmen ABC als xy-Ebene und AB als x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so daß die Koordinaten der drei Punkte sind: $a, 0, 0$; $b, 0, 0$; $c_1, c_2, 0$.

Die Punkte P haben dann der irrationalen Gleichung zu genügen:

$$F(x,y,z)=\frac{(x-a)(x-b)+y^2+z^2}{r_1r_2}+\frac{(x-a)(x-c_1)+y(y-c_2)+z^2}{r_1r_3}$$
$$+\frac{(x-b)(x-c_1)+y(y-c_2)+z^2}{r_2r_3}+1=0,$$

worin r_1, r_2, r_3 die absoluten Werte von

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2},\ \sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2},\ \sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2}$$

sind. Wenn $(d,0,0)$ auf AB zwischen A und B liegt, $a<d<b$, so haben r_1, r_2 die Werte $d-a$, $b-d$; und man erkennt leicht, daß der Punkt der Gleichung genügt. Die Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ haben je drei Glieder; alle drei von $\frac{\partial F}{\partial z}$ werden für $(d,0,0)$ gleich 0; von $\frac{\partial F}{\partial x}$ wird das erste Glied 0, die andern sind

$$\frac{c_2^2}{r_3^3}\left\{\frac{(d-a)^3}{r_1^3}+\frac{(d-b)^3}{r_2^3}\right\}=0,$$

wegen der Werte von r_1, r_2. Also steht die Berührungsebene in der x-Achse auf der xy-Ebene senkrecht.

3. *Wenn an der Ecke D von $ABCD$ $\Delta\leqq 0$ ist und E im Innern von $ABCD$ liegt, so ist an dieser Ecke von $ABCE$ $\Delta<0$.* Wir projizieren E aus A auf BCD nach F, F aus B auf CD nach G, so gilt für zwei aufeinanderfolgende von den vier Ecken $D(A,B,C)$, $G(A,B,C)$, $F(A,B,C)$, $E(A,B,C)$, daß sie an der gemeinsamen Kante DGC, GFB, FEA dieselben Flächenwinkel haben, die einschließenden Kantenwinkel aber von der ersten zur zweiten wachsen.

Zwei solche Ecken seien β,γ,a,Δ; β',γ',a,Δ'; weil $\beta'>\beta$, $\gamma'>\gamma$, so ist

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta'\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma'<\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma;$$

aus $\Delta=4\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma\cos a\}$ folgt

$$\cos a=\frac{\Delta}{\sin\beta\sin\gamma}-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ferner

$$\begin{aligned}\Delta'&=4\cos\tfrac{1}{2}\beta'\cos\tfrac{1}{2}\gamma'(\cos\tfrac{1}{2}\beta'\cos\tfrac{1}{2}\gamma'+\sin\tfrac{1}{2}\beta'\sin\tfrac{1}{2}\gamma'\cos a)\\&=\sin\beta'\sin\gamma'\{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta'\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma'+\cos a\}\\&=\sin\beta'\sin\gamma'\left\{\frac{\Delta}{\sin\beta\sin\gamma}-(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta'\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma')\right\}.\end{aligned}$$

Wenn $\Delta\leqq 0$, so ist $\Delta'<0$.

4. *Nun sei ein Tetraeder $ABCD$ gegeben, bei welchem an keiner Ecke der Exzeß $\geqq 180^0$ oder $\Delta \leqq 0$ ist.* Wir begnügen uns nun mit derjenigen Hälfte der Fläche über ABC, welche auf der Seite des Tetraeders liegt: sie heiße $[ABC]$. Der Exzeß von $D(A, B, C)$ ist $< 180^0$, in irgendeinem Punkte innerhalb ABC ist er $2 \cdot 180^0$; also muß es auf der Verbindungsstrecke mindestens einen Punkt T, bei dem er 180^0 oder $\Delta = 0$ ist, geben; nehmen wir an, es gäbe mehrere, und T sei der nächste an D, so fällt jeder weiter entfernte Punkt in $ABCT$, und sein Δ ist nach der vorangehenden Erörterung < 0 (oder nach „Max. und Min." S. 66: sein Exzeß ist $> 180^0$).

Daraus folgt:

Ein Teil von $[ABC]$ liegt innerhalb des Tetraeders $ABCD$ und wird von jedem aus D kommenden inneren Strahle nur einmal getroffen.

Je nachdem der Fußpunkt der Höhe aus D innerhalb ABC liegt oder in einem der Ebenenteile neben einer Seite, etwa (BC), oder in einem Scheitelwinkel, (A), sind alle drei (inneren) Flächenwinkel des Tetraeders an ABC spitz, oder nur die an AC und AB oder nur der an BC. Wir wollen diese drei Fälle mit I, II, III unterscheiden, bzw. nachher bei ABD mit I′, II′, III′.

In I liegen die drei Kanten DA, DB, DC innerhalb des prismatischen Raumes über ABC und treffen $[ABC]$ zwischen den Ecken: in E, F, G; wir haben die Kurvenbogen EF, FG, GE in den an D zusammenstoßenden Seitenflächen, welche den inneren Teil von $[ABC]$ einschließen.

In II liegt BCD außerhalb des prismatischen Raumes; ist H der Schnitt von AD mit $[ABC]$, so schneiden die BAD, CAD oder γ, β in Kurvenbogen HB, HC, welche mit der geraden Strecke BC den inneren Teil einschließen; die Tangenten in B, C an sie werden durch die Tangentialebene längs BC eingeschnitten.

In III ergibt sich nur ein Kurvenbogen von B nach C in α, der mit den geraden Strecken BA, AC den inneren Teil einschließt; die Tangenten in B, C ergeben sich in ähnlicher Weise.

Jeder von diesen Kurvenbogen wird von einem aus D in der betreffenden Seitenfläche gehenden Strahl nur einmal getroffen.

5. Weil an jeder Seitenfläche wenigstens ein spitzer Flächenwinkel

liegt, müssen mindestens zwei Flächenwinkel spitz sein und sind dann an Gegenkanten gelegen. Wir haben infolgedessen 7 Fälle:

1) alle Flächenwinkel sind spitz, 2) nur einer ist stumpf, 3) zwei durch dieselbe Ecke gehende Kanten, 4) zwei Gegenkanten, 5) drei in eine Ecke zusammenlaufende Kanten, 6) zwei Gegenkanten und eine dritte Kante, 7) zweimal zwei Gegenkanten haben stumpfe Flächenwinkel.

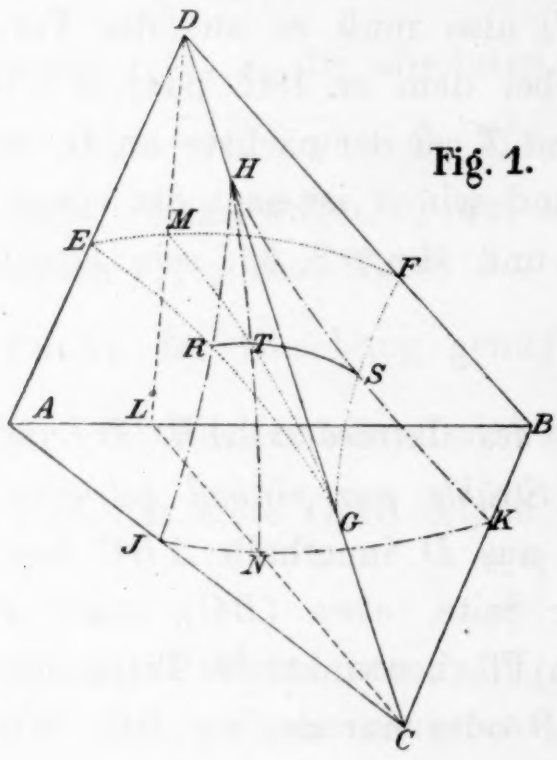


Fig. 1.

Wenn wir jetzt die beiden Flächen ABC, ABD passend aussuchen bzw. die Benennung danach einrichten, so haben wir in 1) und 2) für $[ABC]$ und $[ABD]$ die Situation I I′, wofern in 2) CD die Kante mit dem stumpfen Flächenwinkel ist.

In 3), 5), wo AD, BD, bzw. AD, BD, CD stumpfe Flächenwinkel haben, liegt die Situation I III′ vor.

In 4), wo die stumpfen Winkel an AB, CD liegen, besteht II II′, und der stumpfe Winkel bei AB wird die Betrachtung erleichtern.

In 6), 7), wo CB, AD; AB bzw. CB, AD; AB, CD die stumpfwinkligen Kanten sind, haben wir III III′.

In jedem der vier Fälle ist zu untersuchen, ob die inneren Teile von $[ABC]$ *und* $[ABD]$ *einen reellen Schnitt haben.*

6. I I′ (Fig. 1).

Der innere Teil von $[ABC]$ wird von dem dreibogigen Zuge $EFGE$ umschlossen, wo E, F, G auf AD, BD, CD liegen, der von $[ABD]$ von $IKHI$, wo I, K, H auf AC, BC, DC liegen. Auf CD besteht die Reihenfolge: $CGHD$. Denn weil H auf $[ABD]$ liegt, ist:

$$\cos AHB + \cos BHD + \cos DHA + 1 = 0,$$

also:

$$\cos AHB - \cos BHC - \cos CHA + 1 = 0,$$

oder:

$$\cos BHC + \cos CHA + \cos AHB + 1 = 2(1 + \cos AHB) > 0.$$

H liegt außerhalb des Raumes, der von ABC und $[ABC]$ eingeschlossen wird, also zwischen D und G.

Wir legen durch CD eine Ebene ins Innere des Tetraeders, welche AB in L, die Kurvenbogen EF, IK in M, N, die Flächen $EFGE, IKHI$

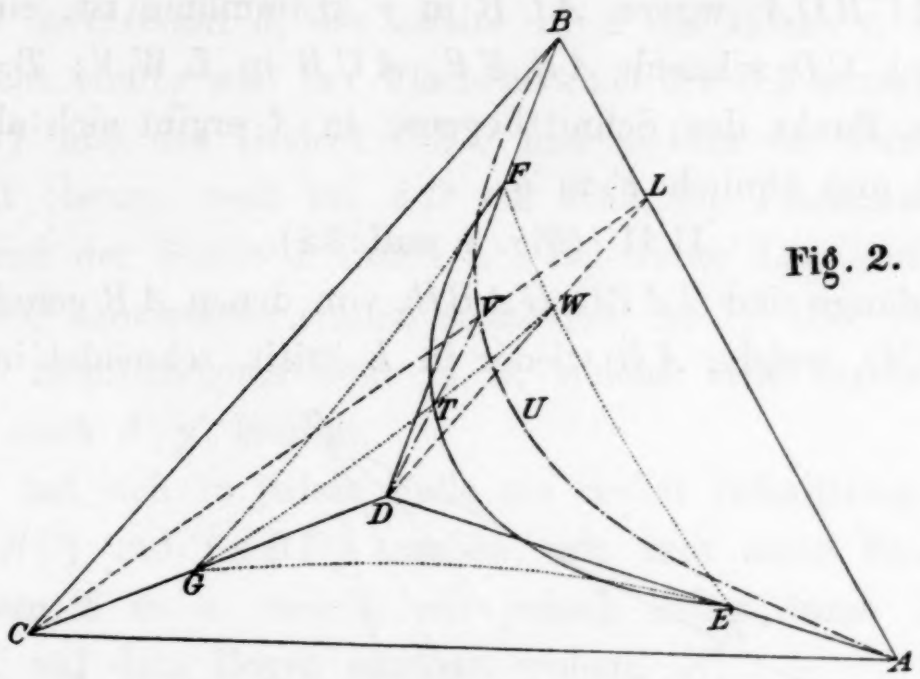


Fig. 2.

in den Bogen MG, NH schneidet, so müssen diese Bogen, wegen der Lage ihrer Endpunkte, mindestens einen Schnittpunkt T haben, und so

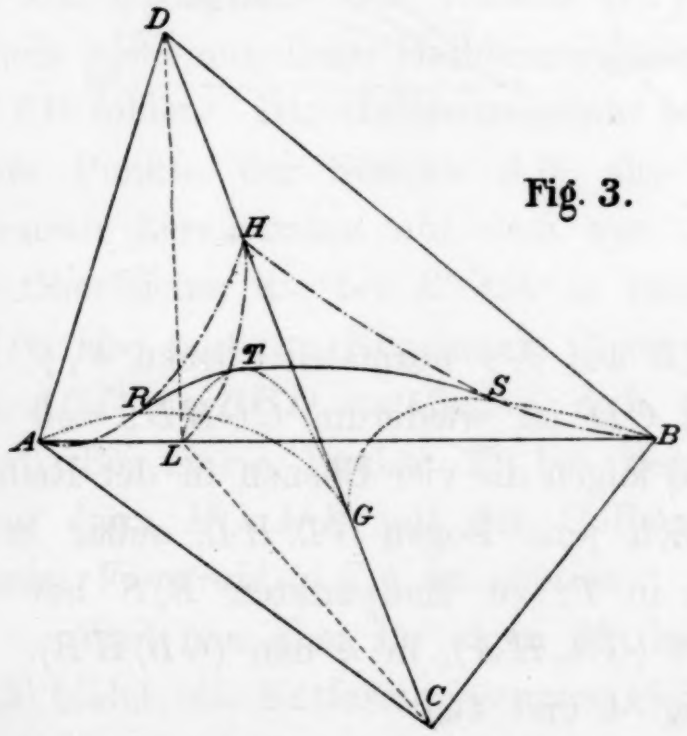


Fig. 3.

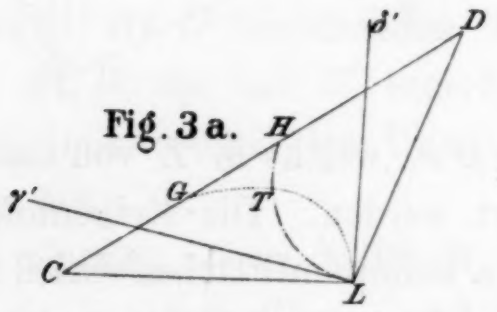


Fig. 3a.

in jeder ins Innere tretenden Ebene durch CD; die Ebenen β, α liefern als Endpunkte $R = (EG, IH)$, $S = (GF, HK)$, und wir erhalten einen Schnittbogen RTS*).

*) Mehrere Schnittbogen würden in Nr. 7 zu mehreren Punkten M führen; mehr als einer sind aber, wie dort gezeigt werden wird, nicht möglich.

I III′ (Fig. 2).

Der innere Teil von $[ABC]$ wird, wie oben, von $EFGE$, der von $[ABD]$ von $AUBDA$, wovon AUB in γ krummlinig ist, eingeschlossen. Die Ebene durch CD schneide AB, EF, AUB in L, W, V; $T = (GW, DV)$ ist erzeugender Punkt des Schnittbogens; in β ergibt sich als Endpunkt $E = (G\hat{E}, DA)$ und ähnlich F in α.

II II′ (Fig. 3 und 3a).

Die Umfänge sind $GABG, GABH$, von denen AB geradlinig ist; die Ebene durch CD, welche AB wieder in L trifft, schneidet in den Bogen

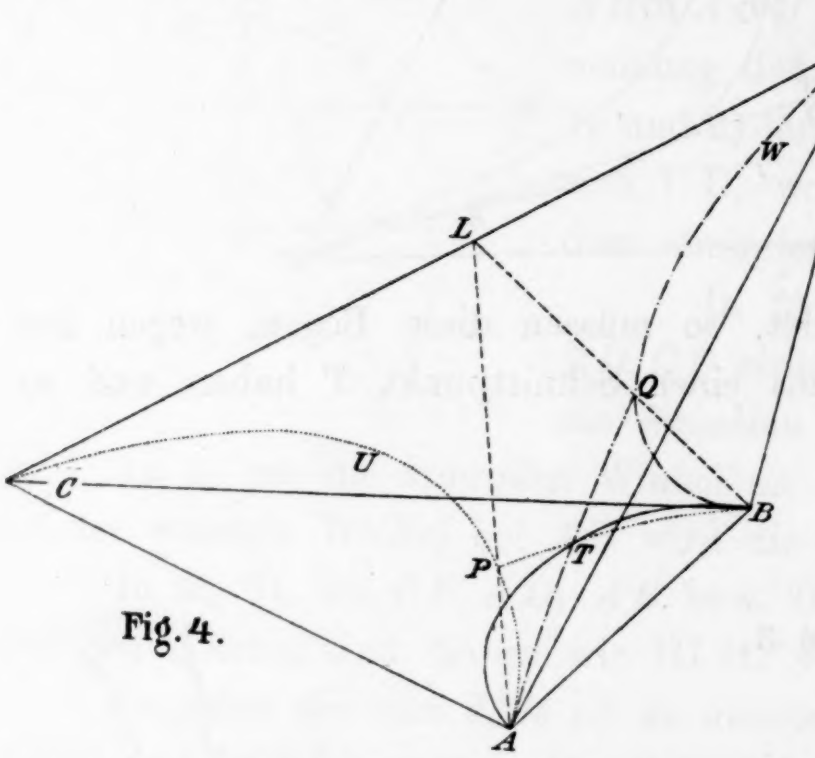


Fig. 4.

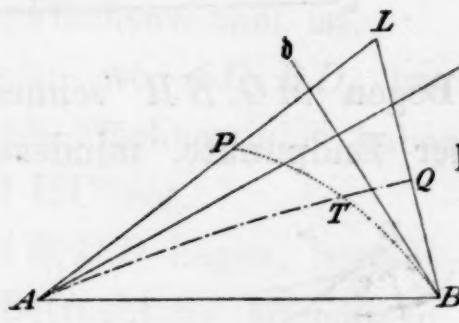


Fig. 4 a.

GL, HL, welche in L von den in AB auf δ, γ normalen Ebenen δ', γ' berührt werden. Die Reihenfolge auf CD ist wiederum $CGHD$; weil AB einen stumpfen Flächenwinkel hat, so folgen die vier Ebenen in der Reihenfolge $\delta, \gamma', \delta', \gamma$*); daher müssen sich jene Bogen GL, HL, außer in L, mindestens noch einmal schneiden: in T; zu Endpunkten R, S hat der Schnittbogen in β den Schnittpunkt (GA, HA), in α den (GB, HB).

III III′ (Fig. 4 und 4a).

Die Perimeter sind $AUCBA$ und $DWBAD$, wovon AUC in β, DWB in α krummlinig sind; diese Bogen werden in A, bzw. B von den Ebenen δ', γ' berührt, die in AB auf δ, γ senkrecht stehen. Wiederum

*) In der Nebenfigur 3a sind die *Spuren* der δ', γ' in der Schnittebene mit δ', γ' bezeichnet.

besteht die Reihenfolge $\delta\gamma'\delta'\gamma$. Wir legen diesmal die Schnittebene durch AB; nur Ebenen zwischen γ', δ' schneiden die AUC, DWB: in P, Q. Wir erhalten die Bogen BP, AQ, von denen der erstere in B die Ebene $\mathfrak{d}$ berührt, welche in CB auf δ, der zweite in A die Ebene $\mathfrak{c}$, welche in AD auf γ senkrecht steht; weil der Flächenwinkel bei CB stumpf ist, werden der Bogen BP und das Dreieck CBD und in ihm der Punkt Q durch $\mathfrak{d}$ getrennt, und ebenso, weil bei AD ein stumpfer Flächenwinkel ist, der Bogen AQ und der Punkt P durch $\mathfrak{c}$. Bei dieser Lage müssen sich die Bogen BP, AQ mindestens einmal schneiden: in T. Die Endpunkte des entstehenden Schnittbogens sind A, B, welche sich ergeben, wenn die Schnittebene nach δ', γ' kommt.

7. So hat sich in jedem Falle ein reeller Schnittbogen der Innenteile von $[ABC]$ und $[ABD]$ ergeben, mit dem einen Endpunkte R in β, dem andern S in α, welche wir jedoch lieber durch ihre Nachbarpunkte R', S' auf dem Bogen ersetzen wollen.

Jeder Punkt T dieses Bogens gibt sowohl mit A, B, C als mit A, B, D eine Ecke E_π, hat also die Eigenschaft, daß die Verlängerung der Halbierungslinie des Winkels ATB mit TC und TD, die im allgemeinen nicht mit dieser Halbierungslinie in einer Ebene liegen, den Winkel $\frac{1}{2}ATB$ bildet. Die Halbierungslinie verbindet den inneren Punkt T mit einem Punkte der Strecke AB, also muß die Verlängerung aus dem Tetraeder heraustreten auf dem aus ACD und BCD bestehenden Teil der Oberfläche; die bei R' tut es innerhalb ACD, die bei S' innerhalb BCD; also muß im Kontinuum dieser Linien (mindestens) ein Übergang von ACD zu BCD stattfinden, d. h. Treffen mit CD.

Bei einem Punkte T, bei dem dies eintritt, — er heiße M —, liegen dann MC, MD mit der Halbierungslinie in einer Ebene, und *der gesuchte Vierstrahl* $(4E_\pi)$ *ist erreicht.*

Weil nun aber für einen M, der mit A, B, C, D einen solchen Vierstrahl bildet, die Entfernungssumme kleiner ist als bei *jedem* andern Punkt, so ist er der einzige.

Es gibt also auf dem Kurvenbogen RTS stets einen und nur einen Punkt M.

Aber konstruierbar ist er nicht, weil er Schnittpunkt von drei Flächen höherer Ordnung ist.

Abschätzung der Lösung der *Pell*schen Gleichung im Anschluß an den *Dirichlet*schen Existenzbeweis.

Von Herrn *R. Remak* in Berlin.

*Dirichlet**) hat ohne Benutzung der Kettenbruchtheorie einen Beweis für die Existenz einer nicht trivialen Lösung der *Pell*schen oder *Fermat*schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

geliefert. Der Herausgeber der *Dirichlet*schen Vorlesungen über Zahlentheorie bemerkt hierzu: „Nur in der einen Beziehung bleibt diese Theorie der *Pell*schen Gleichung unvollständig, daß aus ihr keine direkte Methode fließt, die kleinste positive Auflösung T, U zu finden.“ Ich will im folgenden den Beweis soweit ausgestalten, daß er eine Abschätzung der Lösung liefert. Es kommt mir nur auf die Möglichkeit dieser Abschätzung an, auf die Einengung der gefundenen Grenzen lege ich keinen Wert.

Es sei D eine ganze positive Zahl und kein Quadrat. Man wähle eine positive ganze Zahl m und bilde für jedes positive ganze $y \leqq m$ x ganzzahlig, so daß

$$0 < x - y\sqrt{D} < 1.$$

Durch diese Gleichung ist x als Funktion von y vollständig bestimmt.

Die m Werte $x - y\sqrt{D}$ bezeichne man *der Größe nach* mit

$$\nu_{m1}, \nu_{m2}, \dots \nu_{m\mu}, \dots \nu_{mm},$$

so daß

$$0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \dots < \nu_{m\mu} < \dots < \nu_{mm} < 1.$$

*) *Dirichlet*, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von *R. Dedekind*, 4. Aufl., Braunschweig 1894. S. 371—375.

Das Gleichheitszeichen kann hier, wie auch an späteren Stellen, nicht auftreten, weil sich sonst für $\sqrt{D}$ ein rationaler Wert ergeben würde. Setzt man noch formal

$$\nu_{m0} = 0, \quad \nu_{m,m+1} = 1,$$

so wird

$$\sum_{\mu=0}^{m} (\nu_{m,\mu+1} - \nu_{m,\mu}) = \nu_{m,m+1} - \nu_{m0} = 1 - 0 = 1.$$

Es sei δ_m die kleinste der Differenzen

$$\nu_{m,\mu+1} - \nu_{m,\mu} \qquad \text{für } \mu = 0, 1, 2, \ldots m.$$

Dann ist

$$(m+1)\,\delta_m < \sum_{\mu=0}^{m} (\nu_{m,\mu+1} - \nu_{m,\mu}) = 1,$$

$$\delta_m < \frac{1}{m+1}.$$

Es sei

$$\delta_m = \nu_{m,M+1} - \nu_{m,M}.$$

Hierin sei

$$\nu_{m,M} = x' - y'\sqrt{D}, \quad \nu_{m,M+1} = x'' - y''\sqrt{D},$$

also ist

$$\delta_m = (x'' - x') - (y'' - y')\sqrt{D}.$$

Es haben y'' und y' gleiches Vorzeichen, also ist ihre Differenz absolut genommen kleiner als die größere der beiden, d. h. $\leqq m$. Die Differenz $y'' - y'$ kann positiv oder negativ sein. Man setze

$$y'' - y' = \varepsilon b_m,$$

worin

$$\varepsilon = \pm 1, \; b_m > 0, \quad \text{d. h.} \quad b_m \geqq 1.$$

Es ist nun

$$x'' - x' = \varepsilon b_m \sqrt{D} + \delta_m,$$

$$\frac{x'' - x'}{\varepsilon} = b_m\sqrt{D} + \frac{\delta_m}{\varepsilon} \geqq b_m\sqrt{D} - \delta_m > b_m\sqrt{D} - \frac{1}{m+1} > 0,$$

da

$$m \geqq 1;$$

also setze man

$$\frac{x'' - x'}{\varepsilon} = a_m > 0.$$

Es wird

$$\delta_m = \varepsilon(a_m - b_m\sqrt{D}).$$

Es ist nicht immer a_m das zu $y = b_m$ gehörige x, da die Differenz $a_m - b_m\sqrt{D}$ positiv oder negativ sein kann.

Bestimmt man für alle positiven ganzen Zahlen $b \leqq m$ eine ganze Zahl a so, daß

$$|a - b\sqrt{D}| < \tfrac{1}{2},$$

so ist unter allen diesen absoluten Beträgen

$$|a_m - b_m\sqrt{D}|$$

der kleinste. Denn wäre

$$|a' - b'\sqrt{D}| < |a_m - b_m\sqrt{D}|,$$

so wäre, wenn

$$a' - b'\sqrt{D} > 0,$$

$$a' - b'\sqrt{D} = \nu_{m1} = \nu_{m1} - 0 = \nu_{m1} - \nu_{m0} < \delta_m.$$

Oder wenn

$$a' - b'\sqrt{D} < 0,$$

so wäre

$$a' + 1 - b'\sqrt{D} > 0,$$

$$1 - (a' + 1 - b'\sqrt{D}) = -(a' - b'\sqrt{D}) = \nu_{m,m+1} - \nu_{m,m} < \delta_m.$$

Beide Male erhält man einen Widerspruch gegen die Definition von δ_m. $|a_m - b_m\sqrt{D}|$ ist also der kleinste vorkommende absolute Betrag. Es ist

$$|a_m^2 - b_m^2 D| = |a_m - b_m\sqrt{D}|(a_m + b_m\sqrt{D}) = |a_m - b_m\sqrt{D}|(a_m - b_m\sqrt{D} + 2b_m\sqrt{D})$$

$$\leqq \delta_m(\delta_m + 2b_m\sqrt{D}) < \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{m+1} + 2m\sqrt{D}\right)$$

$$= 2\sqrt{D} - \frac{2\sqrt{D} - \dfrac{1}{m+1}}{m+1} < 2\sqrt{D}.$$

Da $|a_m^2 - b_m^2 D|$ eine ganze Zahl, so ist also zu jedem m ein $b_m \leqq m$ so bestimmbar, daß

$$|a_m^2 - b_m^2 D| \leqq [\sqrt{4D}].$$

($[x]$ bedeute die größte ganze Zahl $\leqq x$.) Es soll nunmehr, wenn m_1 gegeben ist, $m_2 > m_1$ so bestimmt werden, daß $b_{m_2} > b_{m_1}$ wird. Es muß zu dem Zwecke $b_{m_2} > m_1$ werden. Denn wäre $b_{m_2} \leqq m_1$, so wäre, wie oben gezeigt,

$$|a_{m_2} - b_{m_2}\sqrt{D}| > |a_{m_1} - b_{m_1}\sqrt{D}|,$$

was der Definition von b_{m_2} widerspricht. Es muß also werden

$$m_2 \geqq b_{m_2} > m_1 \geqq b_{m_1}.$$

Es ist aber

$$|a_{m_1} - b_{m_1}\sqrt{D}| = \frac{|a_{m_1}^2 - b_{m_1}^2 D|}{(a_{m_1} - b_{m_1}\sqrt{D}) + 2b_{m_1}\sqrt{D}} > \frac{1}{2m_1\sqrt{D} + 1}.$$

Damit

$$|a_{m_2} - b_{m_2}\sqrt{D}| < \frac{1}{m_2+1} < \frac{1}{2_{m_1}\sqrt{D}+1}$$

ist, ist es also ausreichend, daß

$$\frac{1}{m_2+1} < \frac{1}{2m_1\sqrt{D}+1},$$

oder, daß

$$m_2 > 2m_1\sqrt{D}.$$

Das ist sicher erfüllt, wenn man setzt

$$m_2 = m_1([\sqrt{4D}]+1).$$

Setzt man allgemein

$$m_\varrho = ([\sqrt{4D}]+1)^\varrho,$$

so ist, wie gezeigt,

$$b_{m_{\varrho+1}} > b_{m_\varrho}.$$

Es sei

$$A = 2[\sqrt{4D}]^3,$$

also

$$m_A = ([\sqrt{4D}]+1)^{2\cdot[\sqrt{4D}]^3}.$$

Ich behaupte, von den $A+1$ verschiedenen

$$b_{m_0}, b_{m_1}, \ldots b_{m_A}$$

liefern mindestens $[\sqrt{4D}]^2+1$ denselben Wert für

$$a_{m_\varrho}^2 - b_{m_\varrho}^2 D = k_{m_\varrho}.$$

Angenommen, das sei nicht der Fall, jeder der $[\sqrt{4D}]$ möglichen positiven und jeder der $[\sqrt{4D}]$ möglichen negativen Werte des k_{m_ϱ} komme höchstens $[\sqrt{4D}]^2$ mal vor, so wäre ihre Gesamtzahl

$$\leqq 2[\sqrt{4D}]\cdot[\sqrt{4D}]^2 = 2[\sqrt{4D}]^3 = A.$$

Sie ist aber gleich $A+1$, also kommt mindestens einer der Werte k_{m_ϱ}, den ich k nennen will, $[\sqrt{4D}]^2+1$ mal vor. Man bilde die Reste

$$a \equiv \alpha \bmod k, \quad b \equiv \beta \bmod k;$$

die Zahl der möglichen Restepaare ist k^2. Es ist

$$k \leqq [\sqrt{4D}], \; k^2 < [\sqrt{4D}]^2+1,$$

also lassen von den mindestens $[\sqrt{D}]^2+1$ verschiedenen Wertepaaren a, b, für welche

$$a^2 - b^2 D = k,$$

mindestens zwei Wertepaare a', b' und a'', b'' dieselben Reste $\bmod k$. Es ist also

$$a' \equiv a'' \mod k, \quad b' \equiv b'' \mod k.$$

Es ist nunmehr

$$(a' - b'\sqrt{D})(a'' + b''\sqrt{D}) = a'a'' - b'b''D + (a'b'' - b'a'')\sqrt{D}.$$

Da

$$a'a'' - b'b''D \equiv a'^2 - b'^2 D = k \equiv 0 \mod k,$$
$$a'b'' - b'a'' \equiv a'b' - b'a' \equiv 0 \mod k,$$

so kann man setzen

$$(a' - b'\sqrt{D})(a'' + b''\sqrt{D}) = k(t + u\sqrt{D}),$$
$$(a' + b'\sqrt{D})(a'' - b''\sqrt{D}) = k(t - u\sqrt{D});$$

multipliziert man die linken und rechten Seiten dieser Gleichungen, so erhält man

$$(a'^2 - b'^2 D)(a''^2 - b''^2 D) = k^2(t^2 - Du^2);$$

es ist aber die linke Seite gleich k^2, folglich

$$1 = t^2 - Du^2.$$

Es ist

$$a' = (a' - b'\sqrt{D}) + b'\sqrt{D} = b'\sqrt{D} + \delta',$$
$$a'' = (a'' - b''\sqrt{D}) + b''\sqrt{D} = b''\sqrt{D} + \delta'',$$

also

$$kt = (b'\sqrt{D} + \delta')(b''\sqrt{D} + \delta'') - b'b''D = b'\sqrt{D}\delta'' + b''\sqrt{D}\delta' + \delta'\delta''.$$

Da $|\delta'| < \frac{1}{2}$, $|\delta''| < \frac{1}{2}$, so ist

$$t \leqq \frac{1}{k}(m_A\sqrt{D} + \tfrac{1}{4}) < ([\sqrt{4D}] + 1)^{2[\sqrt{4D}]^3 + 1};$$

ferner ist

$$ku = (b'\sqrt{D} + \delta')b'' - (b''\sqrt{D} + \delta'')b' = \delta'b'' - \delta''b',$$

also

$$u \leqq m_A(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = m_A = ([\sqrt{4D}] + 1)^{2[\sqrt{4D}]^3}.$$

Eine genauere Betrachtung der behandelten Methode, die für den Zweck dieser Arbeit nicht nötig ist, würde übrigens auf das Kettenbruchverfahren führen.

Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie.

Von Herrn *A. Ostrowski* in Marburg a. d. L.

§ 1.

In seiner Abhandlung „*Limesbildung und allgemeine Körpertheorie*“*) hat Herr *J. Kürschák* einen neuen Begriff in die Körpertheorie eingeführt, den Begriff der „*Bewertung*“. Es sind in seinen Untersuchungen einige Fragen offen geblieben, deren Lösung ich hier zu geben versuchen möchte. Ich stelle hier zunächst die wichtigsten Definitionen und Sätze von Herrn *J. Kürschák* zusammen.

Herr *Kürschák* ordnet jedem Elemente a eines Körpers K eine reelle Zahl $\|a\|$, die *Bewertung* von a, zu. Diese Zuordnung genügt den folgenden Bedingungen:

1. *Es ist* $\|0\| = 0$; *für jedes* $a \neq 0$ ist $\|a\| > 0$.

2. *Für jedes* a *ist*

$$\|1 + a\| \leqq 1 + \|a\|.$$

3. *Für je zwei Elemente* a, b *ist*

$$\|a \cdot b\| = \|a\| \cdot \|b\|.$$

4. *Es gibt in* K *wenigstens ein solches Element, dessen Bewertung von* 0 *und* 1 *verschieden ist.*

Aus dieser Definition folgt leicht

(1.) $$\|a + b\| \leqq \|a\| + \|b\|, \quad \|a - b\| \geqq \|a\| - \|b\|$$

und

(2.) $$\|-1\| = 1, \quad \|-a\| = \|a\|.$$

Eine solche Zuordnung nennt Herr *Kürschák* eine Bewertung des

*) Dieses Journal, Bd. 142, S. 211.

Körpers K. Und nun werden die verschiedenen Erweiterungen*) des Körpers K untersucht. Zu dem Zwecke wird der Begriff der *Fundamentalreihe* eingeführt. So wird eine Folge der Zahlen des Körpers

$$a_1, a_2, \ldots \tag{3.}$$

genannt, wenn $\|a_{n+q} - a_n\|$ bei wachsendem n und beliebigem positiven q unabhängig von q beliebig klein wird. Eine Zahl A wird der *Limes* der Fundamentalreihe (3.) genannt, wenn $\|A - a_n\|$ bei wachsendem n beliebig klein wird. Da im allgemeinen nicht jede Fundamentalreihe einen Limes im Körper K besitzt, so führt man, ebenso wie in der *Cantor*schen Theorie der Irrationalzahlen, ideelle Limes ein und gelangt auf diese Weise zu einer Erweiterung des Körpers K, in welcher jede Fundamentalreihe einen Limes besitzt. Solche Körper nennt Herr *Kürschák perfekt*. In einem perfekten Körper gilt, wenn A den Limes der Fundamentalreihe $\ldots a_\nu, \ldots$ bedeutet,

$$\|A\| = \lim_{\nu=\infty} \|a_\nu\|.$$

Ist jetzt $\mathfrak{K}$ eine algebraische**) Erweiterung des Körpers K und genügt eine Größe α in $\mathfrak{K}$ der in K irreduziblen Gleichung

$$x^n + \cdots + a = 0,$$

so ordnet Herr *Kürschák* der Größe α die positive Zahl

$$\|a\|^{\frac{1}{n}}$$

zu. Eine solche Zuordnung ist, wie Herr *Kürschák* beweist, eine Bewertung des Körpers $\mathfrak{K}$, die die ursprüngliche Bewertung des Körpers K in sich enthält. Dabei muß jedoch der Körper K schon als perfekt vorausgesetzt werden.***) Erweitert man den Körper K zu dem kleinsten alge-

---

*) *Steinitz*, Algebraische Theorie der Körper, dieses Journal, Bd. 137, S. 175. Jeder Körper, der K enthält, heißt eine Erweiterung von K.

**) *Steinitz*, a. a. O., S. 183. — *Jede* Größe aus $\mathfrak{K}$ genügt also einer algebraischen Gleichung in K.

***) Es ist leicht an einem Beispiel zu zeigen, daß diese Bedingung notwendig ist. Bewerten wir z. B., die rationalen Zahlen durch ihren absoluten Wert, so gelten, wenn wir die Zahlen der dem Körper der rationalen Zahlen entstammenden Gattungsbereiche nach dem Vorgange des Herrn *Kürschák* zu bewerten versuchen, für die Wurzel α jeder quadratischen Gleichung, deren beide Wurzeln verschieden und positiv sind, die Ungleichungen

$$\|1 + \alpha\| > 1 + \|\alpha\|,$$

die geradezu entgegengesetzt sind denjenigen, die in 2. gefordert werden. Diese

braisch abgeschlossenen*) Körper Q, so braucht Q nicht perfekt zu sein. Erweitert man aber jetzt Q zu einem perfekten, bildet man, wie Herr *Kürschák* sich ausdrückt, seinen *derivierten* Körper, so wird dieser zugleich auch algebraisch abgeschlossen sein. Damit gewinnt Herr *Kürschák* den Fundamentalsatz der Theorie:

Jeder bewertete Körper kann durch die Adjunktion passender neuer Elemente zu einem algebraisch abgeschlossenen perfekten bewerteten Körper ergänzt werden.

Man bewertet gewöhnlich alle rationalen Zahlen durch ihren absoluten Wert. Das erste Beispiel einer anderen Bewertung des Körpers der rationalen Zahlen stammt von Herrn *Hensel***). Ist eine rationale Zahl durch p^α teilbar (wo p eine gewöhnliche Primzahl ist) in dem Sinne, daß der Quotient dieser Zahl durch p^α in der reduzierten Form weder im Zähler, noch im Nenner p enthält, so ist α die Ordnungszahl dieser rationalen Zahl. Ist die Ordnungszahl von a gleich α, so kann $e^{-\alpha}$ als die Bewertung von a für den Bereich von p angesehen werden. Je größer α ist, desto kleiner wird die Bewertung von a. Diese Definition wird weiter auf rationale und algebraische p-adische Zahlen übertragen. — Haben die p-adischen Zahlen a und b verschiedene Ordnungszahlen und Bewertungen, so sind die Ordnungszahl und die Bewertung der Summe $a+b$ der kleineren der Ordnungszahlen, bzw. der größeren der Bewertungen der Zahlen a und b gleich. Diese Eigenschaft erleichtert die Untersuchung der Bewertungen in p-adischen Zahlkörpern außerordentlich. Nun stellt Herr *Kürschák* am Schlusse seiner Abhandlung folgende Frage: Ist die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung des Körpers der rationalen p-adischen Zahlen perfekt? M. a. W., gibt es in der kleinsten Erweiterung von $K(p)$ zu einem algebraisch abgeschlossenen perfekten Körper Größen, die keiner algebraischen Gleichung

---

Gleichungen haben die Form $x^2-bx+c=0$ $(b, c>0)$, und, da $||1+\alpha|| = \sqrt{1+b+c}$, $||\alpha|| = \sqrt{c}$ ist, so gilt $\sqrt{1+b+c} > 1+\sqrt{c}$, denn $1+b+c > 1+c+2\sqrt{c}$, oder $b > 2\sqrt{c}$, da die quadratische Gleichung reelle Wurzeln hat und daher $b^2-4c>0$ ist.

*) *Steinitz*, a. a. O., S. 198. *Algebraisch abgeschlossen* heißt jeder Körper Q, in welchem jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen mit Koeffizienten aus Q in lineare Faktoren zerfällt.

**) Vgl. *K. Hensel*, Jahresbericht d. D. M. V., Bd. 16, Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen, S. 475—479.

mit Koeffizienten aus $K(p)$ genügen? Herr *Kürschák* spricht die Vermutung aus, daß es solche Größen, für die die Benennung „transzendente p-adische Zahlen" passend zu sein scheint, wirklich gibt. Meine Untersuchungen haben diese Vermutung bestätigt. Es ist mir gelungen, die allgemeinere Frage zu lösen, wann die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung K' eines perfekten Körpers K perfekt ist. Ich werde nämlich in § 3 den Satz beweisen, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn K' in bezug auf K endlich ist, d. h., wenn es in K' eine endliche Anzahl von Größen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ gibt, von der Beschaffenheit, daß alle Größen aus K' in der Form dargestellt werden können:

$$\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \cdots + \alpha_n\omega_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ dem Körper K angehören. Um diesen Satz zu beweisen, gehe ich in § 2 auf einige Untersuchungen ein, die eine Verallgemeinerung der Untersuchungen von Herrn *Dedekind* über die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen*) sind. Es ergibt sich dabei die Antwort auf eine von Herrn *Dedekind* in der zitierten Abhandlung gestellte Frage nach der Existenz gewisser Permutationen des Körpers aller reellen Zahlen, und zwar wird diese Frage, entgegen einer von Herrn *Dedekind* ausgesprochenen Vermutung im bejahenden Sinne beantwortet. Die Resultate der ersten 7 Nummern in § 2 sind im wesentlichen in der *Steinitz*schen Arbeit enthalten. Ich glaubte aber auch diese Resultate, wegen ihrer fundamentalen Wichtigkeit für meine Untersuchung, mit etwas abweichender Begründung ausführlich darlegen zu sollen. —

Die Existenz der transzendenten *p-adischen* Zahlen kann auf einem viel einfacheren Wege bewiesen werden, und ich gebe daher im folgenden, ehe ich mich zu den weiteren Untersuchungen wende, einen sehr einfachen Beweis dieser Tatsache. Ich betrachte irgendeine Folge positiver ganzen Zahlen

$$m_1, m_2, \ldots, \tag{1.}$$

für welche allgemein die Ungleichungen gelten

$$m_i > m_{i-1}^3. \qquad (i=2,3,\ldots)$$

Daraus folgt

---

*) *R. Dedekind*, Über die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen. Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der K. Ges. der Wiss. zu Gött., (1901). S. 6—9.

$$m_{i-1} < m_i^{\frac{1}{3}}, \quad m_{i-2} < m_i^{\frac{1}{9}}, \quad m_{i-3} < m_i^{\frac{1}{27}}, \ldots$$

und daher

$$\text{(2.)} \qquad \prod_{k=1}^{k=i-1} m_k < m_i^{\frac{1}{2}}.$$

Weiter definiere ich eine Folge der algebraischen p-adischen Zahlen

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$$

durch die im Bereiche der rationalen p-adischen Zahlen irreduziblen*) Gleichungen

$$\beta_1^{m_1} = p, \beta_2^{m_2} = p, \beta_3^{m_3} = p, \ldots \beta_n^{m_n} = p, \ldots (p).$$

Die Ordnungszahl der Zahl β_i ist $\frac{1}{m_i}$ gleich. Und nun *betrachte ich die Teilsummen* S_i der unendlichen Reihe

$$\sum_{e=1}^{e=\infty} a_e p^e \beta_e, \qquad S_i = \sum_{e=1}^{e=i} a_e p^e \beta_e,$$

wo a_i irgendwelche bestimmte Zahlen aus der Reihe

$$1, 2, \ldots p-1$$

bedeuten. *Diese Teilsummen bilden eine Fundamentalreihe.* In der Tat, die Differenz $S_{n+q} - S_n = \sum_{n+1}^{n+q} a_e p^e \beta_e$ hat infolge der schon früher erwähnten Eigenschaft der p-adischen Zahlen die Ordnungszahl $n+1+\frac{1}{m_{n+1}}$. Es sinkt folglich die Zahl

$$\| S_{n+q} - S_n \| = e^{-\left(n+1+\frac{1}{m_{n+1}}\right)}$$

unter jede vorgegebene positive Grenze herab, falls n hinreichend groß genommen wird. *Der Limes der Fundamentalreihe*

$$S_1, S_2, \ldots S_i, \ldots$$

kann aber in keinem in bezug auf $K(p)$ *algebraischen Körper enthalten sein,* ist folglich keine algebraische p-adische Zahl. Um das zu zeigen, nehme ich an, es sei dieser Limes einer in bezug auf $K(p)$ algebraischen Zahl A gleich, die in einem algebraischen Körper $K(A)$ vom Grade M enthalten sei. Ich nehme dann in der Folge (1.) $m_n < M^2$ und betrachte den aus den Körpern $K(A), K(\beta_1), K(\beta_2), \ldots K(\beta_{n-1})$ zusammengesetzten Körper $\mathfrak{R}$, dessen Grad kleiner als

$$M \prod_{k=1}^{k=n-1} m_k,$$

*) Weil die Funktionen $x^{m_i} - p$ die sogenannten *Eisenstein*schen Funktionen sind. Vgl. *K. Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig, 1908, S. 75.

also auch infolge der Ungleichung (2.) kleiner als $M \cdot m_n^{\frac{1}{2}}$ und folglich als m_n (da $m_n > M^2$ gewählt ist) ist. Die in $\mathfrak{R}$ enthaltene Zahl

$$A - \sum_{1}^{n-1} a_e p^e \beta_e = B$$

muß dann der Limes der Fundamentalreihe $\ldots \bar{S}_i, \ldots$ sein, wo

$$\bar{S}_1 = a_n p^n \beta_n, \; \bar{S}_2 = a_n p^n \beta_n + a_{n+1} p^{n+1} \beta_{n+1}, \ldots \bar{S}_i = \sum_{n}^{n+i-1} a_e p^e \beta_e$$

ist. Die Ordnungszahlen der $\bar{S}_i$ sind alle $n + \frac{1}{m_n}$ gleich. Die Ordnungszahl von B ist aber von $n + \frac{1}{m_n}$ gewiß verschieden. Es sind nämlich die Nenner der in der reduzierten Form geschriebenen Ordnungszahlen der in einem algebraischen Körper enthaltenen Zahlen immer Teiler vom Grade des Körpers*), also nie größer als dieser Grad. Der Grad des Körpers $\mathfrak{R}$ ist aber kleiner, als m_n. Daraus folgt, daß die Ordnungszahl der Differenz $B - \bar{S}_n$ gleich der kleineren von der Ordnungszahl von B und der Zahl $n + \frac{1}{m_n}$ ist. Die Bewertung

$$\| B - \bar{S}_n \|$$

ist also gleich oder größer als $e^{-\left(n + \frac{1}{m_n}\right)}$, und B kann daher nicht dem $\lim_{k=\infty} \bar{S}_n$ gleich sein. — Damit haben wir die Existenz einer Fundamentalreihe $\ldots S_i, \ldots$ bewiesen, die keinen algebraischen Grenzwert haben kann.

§ 2.

1. *Einige Sätze aus der Körpertheorie.* Sind in einem Körper K alle Größen

$$1, \; 1+1, \; 1+1+1, \ldots$$

voneinander, also auch von 0 verschieden, so nennt man, nach Herrn *Steinitz*, K einen *Körper von der Charakteristik* 0. Ist das nicht der Fall, so gibt es immer eine Primzahl β von der Eigenschaft, daß das p-te Glied dieser Reihe gleich 0 ist. Dann ist im Körper K das p-te Vielfache jeder Größe gleich 0. Solche Körper werden Körper *von der Charakteristik* p genannt**). Es sei nun A eine algebraische Erweiterung eines beliebigen Körpers K. Eine in A, aber nicht in K enthaltene Größe wird

*) *Hensel*, Theorie d. alg. Zahlen, S. 140–141.

**) *Steinitz*, a. a. O., S. 181.

von der ersten Art genannt, falls sie einer in K irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus K und mit *lauter verschiedenen* Wurzeln genügt*), dagegen *von der zweiten Art*, wenn diese Gleichung lauter gleiche Wurzeln hat. Eine algebraische Erweiterung heißt *von der ersten Art*, wenn sie nur die Größen von der ersten Art enthält; enthält sie aber nur die Größen von der zweiten Art, so wird sie ein *Wurzelkörper* in bezug auf K oder auch eine *Erweiterung zweiter Art* genannt. Und nun verdankt man Herrn *Steinitz* den Satz**):

„Ist L eine beliebige algebraische Erweiterung des Körpers K, so existiert ein Körper L_0 zwischen K und L von der ersten Art in bezug auf K von der Eigenschaft, daß L in bezug auf L_0 von der zweiten Art ist."

Ist nun γ die Wurzel einer in K irreduziblen Gleichung vom Grade m, so kann die Adjunktion von γ so geschehen, daß zuerst eine Größe γ_0 von der ersten Art adjungiert wird, die einer Gleichung vom n ten Grade genügt, dann die Wurzel einer im $K(\gamma_0)$ irreduziblen Gleichung $x^{p^f} - \gamma_0 = 0$. n wird der reduzierte Grad von γ genannt, f der Exponent von γ. Die Zahl n ist der Anzahl der untereinander verschiedenen Wurzeln von der in K irreduziblen Gleichung, der γ genügt, gleich. — Jede endliche Erweiterung erster Art ist einfach, d. h., besitzt eine primitive Größe***).

Es sei A eine *beliebige* Erweiterung von K. Dann kann, nach einem Satze von *Steinitz*†), diese Erweiterung in zwei Schritten geschehen. Mit dem ersten adjungieren wir zu K ein System von Größen, die alle algebraisch unabhängig voneinander in bezug auf K†) sind. Eine solche Erweiterung nennt Herr *Steinitz* eine *rein transzendente Erweiterung von K*. Mit dem zweiten Schritte adjungieren wir ein System von in bezug auf diese rein transzendente Erweiterung *algebraischen* Elementen. M. a. W. jede Erweiterung kann in eine rein transzendente und eine algebraische Erweiterung zerlegt werden.

---

*) *Steinitz*, a. a. O., S. 231.

**) *Steinitz*, a. a. O., S. 238.

***) *Steinitz*, a. a. O., S. 182, 235. Eine primitive Größe einer Erweiterung von K ist eine Größe, durch welche alle anderen Größen der Erweiterung als rationale Funktionen mit Koeffizienten aus K dargestellt werden können.

†) *Steinitz*, a. a. O., S. 293.

2. *Abbildungen und Permutationen.* Wir erklären einige im wesentlichen von Herrn *Dedekind* stammende Begriffe. Wird jedem Elemente eines Systems C ein Element eines Systems C' zugeordnet, so nennen wir eine solche Zuordnung eine *Abbildung* des Systems C. Das dem Elemente a zugeordnete Element $\varphi(a)$ nennen wir das *Bild* von a. Diese Abbildung bezeichnen wir durch φ. Enthält C ein Teilsystem C_1, so bewirkt φ eine Abbildung von C_1, die wir durch ψ bezeichnen wollen. Dann heißt ψ *der auf* C_1 *bezügliche Rest der Abbildung* φ, φ aber heißt ein *Vielfaches* oder ein *Multiplum* von ψ. Sind A_1 und A_2 zwei beliebige Systeme, φ_1 und φ_2 irgendwelche Abbildungen von A_1 und A_2, so nennen wir φ_1 und φ_2 *übereinstimmend*, falls die auf den Durchschnitt der Systeme A_1 und A_2 bezüglichen Reste von φ_1 und φ_2 übereinstimmen. — Es sei uns gegeben ein Körper K, der in einem umfassenderen $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Es besitze weiter eine Abbildung φ des Körpers K folgende Eigenschaften:

1) *Das Bild jeder Größe aus* K *sei in* $\mathfrak{R}$ *enthalten.*

2) *Sind* a *und* b *ganz beliebige Größen in* K, *so sollen folgende Beziehungen stattfinden:*

$$\text{a)}\ \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b);\quad \text{b)}\ \varphi(a-b)=\varphi(a)-\varphi(b);$$

$$\text{c)}\ \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b);\quad \text{d)}\ \varphi\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)},$$

die letzte, falls $b \neq 0$ *ist.*

3) *Das Bild wenigstens einer Größe aus* K *soll von* 0 *verschieden sein.*

Eine solche Abbildung nennen wir eine *Permutation* des Körpers K*). Es folgt leicht aus dieser Definition, daß das System $\varphi(K)$ einen Körper bildet und daß die Abbildung φ eine umkehrbare ist**). Die Permutation φ von K, für welche $\varphi(a)=a$ für alle Größen a des Körpers K ist, heißt *die identische Permutation* von K. Zwei Permutationen φ und φ' des Körpers K sind verschieden, falls es wenigstens eine Größe in K gibt, die durch φ und φ' in zwei verschiedene Größen übergeführt wird. Jede Permutation läßt die den rationalen Zahlen entsprechenden Elemente in Ruhe. Der Körper $\varphi(K)$ heißt der *konjugierte Körper* von K, die Größen $\varphi(a)$ *konjugiert* zu a. Der Körper $\varphi(K)$ kann natürlich der Gesamtheit der Elemente nach mit K zusammenfallen. Der Körper $\mathfrak{R}$

*) *Dedekind*, Über die Permutationen . . . S. 5, *Dirichlet-Dedekind*, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1894, § 161.

**) *Dirichlet-Dedekind*, Vorlesungen . . . § 161.

wird in unseren Untersuchungen ein algebraisch abgeschlossener Körper über K sein.

3. *Die Permutationen der endlichen Erweiterungen erster Art.* Es sei K ein Körper mit einer Permutation φ, A eine endliche Erweiterung erster Art von K. Dann besitzt A ein primitives Element a. Durch rationale Funktionen von a mit Koeffizienten aus K wird der Körper A erschöpft. Wir wollen alle diejenigen Permutationen ψ von A untersuchen, die Multipla von φ sind. Genügt a einer in K irreduziblen Gleichung $f(x) = 0$ mit Koeffizienten aus K, so muß $\psi(a)$ der Gleichung $\varphi(f(x)) = 0$ genügen, die aus $f(x) = 0$ hervorgeht, wenn man in den Koeffizienten der Funktion $f(x)$ die Permutation φ ausführt. Da durch die Angabe des Elementes $\psi(a)$ die Permutation ψ vollständig bestimmt ist, so kann es nur so viele verschiedene Permutationen ψ geben, als die Gleichung $\varphi(f(x)) = 0$ verschiedene Wurzeln besitzt. Ist umgekehrt γ eine Wurzel der Gleichung $\varphi(f(x)) = 0$, so erhält man eine Permutation ψ, wenn man jeder Größe des Körpers A, die ja als rationale Funktion von a mit Koeffizienten aus K dargestellt werden kann, $\Phi(a)$, die Größe $\varphi\Phi(\gamma)$ zuordnet, wo die Koeffizienten der Funktion $\varphi\Phi$ aus den Koeffizienten der Funktion Φ durch die Permutation φ hervorgehen. Nun ist die Gleichung $\varphi(f(x)) = 0$ in $\varphi(K)$ ebenfalls irreduzibel, von demselben Grade wie $f(x) = 0$ und besitzt lauter verschiedene Wurzeln. Das letzte ergibt sich daraus, daß die von 0 verschiedene Diskriminante der Gleichung $f(x) = 0$ durch die Permutation φ in die ebenfalls von 0 verschiedene (wie aus der Eigenschaft 2) b) in 2. und der Umkehrbarkeit der Permutationen sofort einleuchtet) Diskriminante der Gleichung $\varphi(f(x)) = 0$ übergeführt wird. Daraus folgt, daß die Anzahl der verschiedenen Permutationen ψ genau gleich dem Grade des Körpers A in bezug auf den Körper K ist. Ist nun der Körper A vom Grade m in bezug auf K, B vom Grade n und von der ersten Art in bezug auf A, so ist B von der ersten Art und vom Grade mn in bezug auf K und besitzt folglich genau mn Permutationen, die Multipla von φ sind. Es gibt dann unter diesen mn Permutationen genau n Multipla von irgendeiner gegebenen Permutation ψ. — Ist φ die identische Permutation von K, so heißen die Körper, in die A durch verschiedene Substitutionen ψ übergeführt wird, die zu A *in bezug auf* K *konjugierten Körper.*

4. *Normale Erweiterungen erster Art.* Ist A eine endliche Erweiterung erster Art von K und fällt A mit seinen in bezug auf K konjugierten Körpern zusammen, so heißt A *normal in bezug auf* K. Das kleinste gemeinsame Multiplum aller zu einer endlichen Erweiterung A von K in bezug auf K konjugierten Körper ist ein in bezug auf K normaler Körper und zwar der kleinste, der A enthält. Das kleinste gemeinsame Vielfache und der größte gemeinsame Teiler von zwei oder mehreren in bezug auf K normalen Körpern sind wiederum normal in bezug auf K. Die in bezug auf K normalen Körper A besitzen die Eigenschaft, daß eine in K irreduzible Funktion $f(x)$, die in A *eine* Wurzel besitzt, daselbst in lineare Faktoren zerfällt. Ist nämlich diese Wurzel α, so besitzt der Körper $K(\alpha)$ eine Permutation, die α in eine beliebige Wurzel α' der Funktion $f(x)$ überführt. Der Körper A, als ein Multiplum von $K(\alpha)$, besitzt aber die Permutationen, die Multipla von dieser Permutation sind. Und da der Körper A mit seinen Konjugierten zusammenfällt, so ist auch α' in A enthalten. Nun sind, nach einem Satze von *Steinitz**), alle durch Adjunktion der Größen von der ersten Art aus einem Körper K entstehenden Körper von der *ersten* Art in bezug auf K. Die Funktion $f(x)$ besitzt folglich lauter verschiedene Wurzeln, zerfällt also in A in lineare Faktoren. Diese Eigenschaft kann als *Definition* der in bezug auf K normalen Körper genommen werden, und dann gilt diese Definition auch für die *unendlichen* algebraischen Erweiterungen erster Art von K. Auch für *unendliche* normale Erweiterungen gilt der Satz, daß *das kleinste gemeinsame Multiplum und der größte gemeinsame Teiler eines Systems von normalen Erweiterungen des Körpers K wiederum normal in bezug auf K sind.* Der Beweis beruht auf dem Satze von *Steinitz*, daß jede Größe eines durch Adjunktion einer unendlichen Anzahl von Elementen aus K hervorgehenden Körpers in einem Körper enthalten ist, der aus K durch Adjunktion einer *endlichen* Anzahl von diesen Elementen hervorgeht**). Ist uns ein System $A, B, C, \ldots$ von normalen Körpern über K gegeben, so bezeichnen wir das kleinste gemeinsame Multiplum und den Durchschnitt aller Körper dieses Systems durch M, bzw. D. Jede Größe α des Körpers M ist in einem in bezug auf K endlichen normalen Unter-

*) *Steinitz*, a. a. O., S. 234, 235.

**) *Steinitz*, a. a. O., S. 177.

körper von M enthalten. Um das zu zeigen, bemerken wir vor allem, daß α gewiß in einem Körper enthalten ist, welcher aus einer endlichen Anzahl der in bezug auf K endlichen Körper $\mathsf{A}, \mathsf{A}_1, \ldots$ besteht, wobei $\mathsf{A}, \mathsf{A}_1, \ldots$ Teiler der Körper $A, B, C, \ldots$ sind. Wir werden im folgenden unter der *Norm* eines Körpers A in bezug auf K den aus A und seinen in bezug auf K konjugierten Körpern zusammengesetzten Körper verstehen*). Es seien nun

$$N(\mathsf{A}), N(\mathsf{A}_1), \ldots \tag{1.}$$

die Normen der Körper $\mathsf{A}, \mathsf{A}_1, \ldots$ in bezug auf den Körper K. Enthält der normale Körper A den Körper A, so enthält er auch seine Norm. Die Norm von A entsteht nämlich aus K durch Adjunktion sämtlicher Nullstellen der in K irreduziblen Gleichung, welcher ein primitives Element von A genügt. Diese Nullstellen sind aber alle in A enthalten, da A normal ist. Daraus folgt, daß das kleinste gemeinsame Multiplum M der Körper (1.) in M enthalten ist. Der Körper M ist aber normal über K, weil die Anzahl der Körper (1.) endlich ist, und enthält α. Dann enthält aber M, also auch M, mit α alle Wurzeln der in K irreduziblen Gleichung, welcher α in K genügt, also ist der Körper M normal. Um dasselbe von D zu beweisen, bezeichne ich durch α irgendeine in D enthaltene Größe, durch $\alpha', \alpha'', \ldots$ die anderen Wurzeln der in K irreduziblen Gleichung, welcher α genügt. Dann ist α, mithin auch $\alpha', \alpha'', \ldots$ in allen Körpern $A, B, C, \ldots$ enthalten. Folglich sind $\alpha', \alpha'', \ldots$ in D enthalten. M. a. W., D ist normal in bezug auf K. — Ist Θ eine Permutation des Körpers K, und A eine normale Erweiterung von K, so wird A durch jede Θ enthaltende Permutation in einen Körper übergeführt, der normal in bezug auf $\Theta(K)$ ist.

5. *Die Permutationen der normalen Erweiterungen.* Ist U eine normale Erweiterung des Körpers K, so wird U durch jede Permutation, die K in Ruhe läßt, in sich selbst übergeführt. Genügt nämlich eine Größe aus U der in K irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus $K: f(x) = 0$, und sind die ebenfalls in U enthaltenen Größen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ die sämtlichen Wurzeln dieser Gleichung, so werden diese Größen durch jede Permutation von U, die K, folglich auch die Koeffizienten von $f(x)$, in Ruhe läßt, nur untereinander permutiert.

*) *Dirichlet-Dedekind*, § 165, S. 480.

Wir wollen jetzt den Hülfssatz beweisen, der für das Folgende die Grundlage bildet.

„Sind A und B zwei normale Erweiterungen des Körpers K, D ihr Durchschnitt, M ihr kleinstes gemeinsames Multiplum, sind weiter die Permutationen Θ_1 und Θ_2 der Körper A, bzw. B übereinstimmend in bezug auf D, so gibt es eine und nur eine Permutation Θ des Körpers M, die das Multiplum von Θ_1 und Θ_2 ist.“ Wir bezeichnen im folgenden Beweise den aus den Körpern K_1, K_2 zusammengesetzten Körper der Kürze wegen durch $K_1 K_2$.

Es ist zuerst leicht zu sehen, daß die Permutation Θ, falls sie überhaupt existiert, durch Θ_1 und Θ_2 eindeutig bestimmt ist, weil jede Größe aus M eine rationale Funktion mit Koeffizienten aus K von den Größen der Körper A und B ist. Um jetzt die Existenz von Θ zu beweisen, nehmen wir zunächst an, A und B seien endliche Erweiterungen von K vom Grade m, bzw. n. Dann ist, nach einem bekannten Satze*), der Grad von M in bezug auf B dem Grade von A in bezug auf D gleich. Ist der Grad von D gleich d, so wird der Grad von M in bezug auf K gleich $\frac{mn}{d}$ sein. Jede von den $\frac{mn}{d}$ Permutationen des Körpers M, die mit Θ_1 und Θ_2 dieselben auf K bezüglichen Reste haben, hat zu auf A und B bezüglichen Resten Permutationen, die in bezug auf D übereinstimmen. Die Anzahl der in bezug auf D übereinstimmenden Permutationenpaare der Körper A und B ist aber genau gleich $\frac{mn}{d}$ (denn jeder der m Permutationen von A entsprechen $\frac{n}{d}$ Permutationen von B, die mit ihnen in bezug auf D übereinstimmen, da $\frac{n}{d}$ der Relativgrad des Körpers B bezüglich des Körpers D ist). Und da zwei verschiedenen Permutationen von M nach dem vorhergesagten auch zwei verschiedene Permutationenpaare von A und B entsprechen, so entspricht *jedem* Paare der in bezug auf D übereinstimmenden Permutationen von A und B *eine* bestimmte Permutation von M. Sind A und B nicht beide endlich in bezug auf K, so entsprechen, wie bei dem Beweise des Schlußsatzes in 4. gezeigt wurde, jeder Größe δ aus M zwei normale und in bezug auf K endliche Teiler

*) *Dirichlet-Dedekind*, § 165, S. 481. Der Beweis gilt für alle algebraischen Erweiterungen erster Art. Vgl. auch *Frobenius*, Math. An., 70 S. 457.

der Körper A und B — die wir durch A' und B' bezeichnen wollen — von der Beschaffenheit, daß δ in dem aus A' und B' zusammengesetzten Körper $A'B' = M'$ enthalten ist. Sind ϑ_1 und ϑ_2 die auf A', B' bezüglichen Reste von Θ_1, Θ_2, so sind ϑ_1 und ϑ_2 in bezug auf den Durchschnitt von A' und B' übereinstimmend und es wird durch ϑ_1, ϑ_2 eine Permutation des Körpers M' bestimmt, die die Größe δ in δ' überführt. Benutzen wir, um δ' zu bestimmen, andere Körper $A'', B'', M'' = A''B''$, so kommen wir zu demselben Resultate, da $A', A'', B', B'', M', M''$ Unterkörper von $A'A'', B'B'', M'M'' = (A'A'')(B'B'')$ sind und die Bestimmung von δ' durch diese Körper zu einem eindeutig bestimmten Resultate führt. Die auf diese Weise *eindeutig* bestimmte Zuordnung von δ' zu δ wird eine Permutation sein. Um dies einzusehen, braucht man nur zu beachten, daß, wenn irgend zwei Größen α und β durch diese Zuordnung zu α' und β' zugeordnet werden, es immer zwei normale endliche Erweiterungen von K — A''', B''' — von der Eigenschaft gibt, daß α und β im Körper $A'''B'''$ enthalten sind und daß die Zuordnung von α und β zu α' und β' der auf das System α, β bezügliche Rest einer Permutation des Körpers $A'''B'''$ ist. Daraus folgt, daß die Zuordnung von α und β zu α' und β' den Gesetzen 1), 2), 3) in 2. gehorcht. — Damit ist unser Hülfssatz bewiesen.

6. *Der Hauptsatz. — Vorbereitungen zum Beweise des Hauptsatzes.*

Wir schreiten nun zum Beweise des folgenden Satzes:

„Ist der Körper U eine normale algebraische unendliche Erweiterung erster Art des Körpers K, ist weiter φ eine Permutation des Körpers K, so gibt es wenigstens eine Permutation ψ des Körpers U, die φ zu dem auf K bezüglichen Reste hat.“

Dieser Satz ist für den speziellen Fall des Körpers aller algebraischen Zahlen und seiner Unterkörper von Herrn *Dedekind* bewiesen*). Für den allgemeinen Fall ist der Satz von Herrn *Steinitz* bewiesen worden**).

Der Körper U ist aus einem Systeme von endlichen und in bezug auf K normalen Körpern zusammengesetzt. Jeder dieser normalen Körper besitzt ein primitives Element. Der Körper U entsteht aus K durch Adjunktion des Systems S dieser primitiven Elemente β. Ich denke nun

*) *Dedekind*, Über die Permutationen . . ., S. 6—9.

**) *Steinitz*, a. a. O., S. 283, Satz 5.

die Größen β auf irgend eine Weise wohlgeordnet, was nach dem berühmten Satze von *Zermelo**) immer möglich ist. Dieses wohlgeordnete System der β werde ich durch J' bezeichnen. Aus J' bilde ich die Teilmenge J nach folgender Regel. Ein Element β soll in die Menge J aufgenommen werden, falls es in dem Körper, der aus K durch Adjunktion aller in J' dem Elemente β vorhergehenden Elemente entsteht, nicht enthalten ist. Die Elemente von J, die ich durch γ bezeichnen will, seien nach derselben Regel geordnet wie in J'. Dann werden sie auch wohlgeordnet sein, weil jedes System der Elemente aus J ein erstes Element besitzt, da es zugleich eine Teilmenge der Elemente aus der wohlgeordneten Menge J' ist. Wir wollen nun zeigen, daß U aus K durch Adjunktion der Gesamtheit J aller γ hervorgeht. Dazu brauchen wir nur zu beweisen, daß alle β im Körper $K(J)$ enthalten sind. Ist das nicht der Fall, so muß es, da J' wohlgeordnet ist, ein *erstes* $\overline{\beta}$ in J' geben von der Beschaffenheit, daß alle vorhergehenden β im Körper $K(J)$ enthalten sind, während das für $\overline{\beta}$ nicht der Fall ist. Da dieses $\overline{\beta}$ der Menge der γ nicht angehört, muß es in dem Körper enthalten sein, der aus K durch Adjunktion aller vorhergehenden β entsteht, also, nach dem schon mehrfach benutzten *Steinitz*schen Satze, auch in einem Körper, der aus K durch Adjunktion einer *endlichen* Anzahl der vorhergehenden β entsteht. Jedes der vorhergehenden β ist aber durch eine endliche Anzahl der Größen γ ausdrückbar, also ist $\overline{\beta}$ im Körper $K(J)$ enthalten.

Wir führen jetzt noch einige weitere Bezeichnungen ein. Die Gesamtheit der einem beliebigen Elemente γ_ω**) in J vorhergehenden Größen werden wir durch A_ω bezeichnen. Der aus K durch Adjunktion von A_ω hervorgehende Körper soll durch K_ω bezeichnet werden. Den Durchschnitt der Körper K_ω und $K(\gamma_\omega)$ bezeichnen wir durch D_ω. Der Grad von $K(\gamma_\omega)$ in bezug auf D_ω sei N_ω, der in bezug auf K sei n_ω. Ist ϑ eine der $\frac{n_\omega}{\mathsf{N}_\omega}$ Permutationen von D_ω, die Multipla von φ sind, so gibt es unter n_ω Permutationen von $K(\gamma_\omega)$ genau N_ω Multipla von ϑ. Wir greifen irgendeine aus diesen heraus und ordnen sie der Permutation ϑ zu. Auf diese Weise ordnen wir jeder Permutation von D_ω eine bestimmte Permutation

---

*) Math. Ann. Bd. 59, S. 514; Bd. 65, S. 111.

**) Unter ω wird eine beliebige Ordnungszahl verstanden.

von $K(\gamma_\omega)$ zu. Nun seien auch *alle* Größen des Körpers U wohlgeordnet, und zwar in folgender Weise. Die Größen des Körpers K gehen vor allen anderen Größen des Körpers U. Allgemein gehen alle Größen des Körpers K_ω *vor* γ_ω. Hier bedeutet ω die Ordnungszahl, die γ_ω in der Wohlordnung J besitzt. Die betrachtete Wohlordnung des Körpers U wollen wir durch W bezeichnen; sie hat folgende Eigenschaft: Der aus K durch Adjunktion eines Abschnittes von W hervorgehende Körper ist ein Abschnitt von W*).

7. *Beweis des Hauptsatzes.*

Wir definieren nun die *Abbildungskörper* von W. So nennen wir die Körper, die folgende Eigenschaften besitzen:

1) Sie sind die Abbildungen gewisser Abschnitte von W, die auch Körper sind. Sie sind ebenso geordnet wie jene.

2) Die Abbildungen, durch die die Abschnitte von W auf die Abbildungskörper abgebildet werden, sind Permutationen.

3) Diese Permutationen enthalten die Permutation φ, sind also Multipla dieser Permutation.

Ist in einem Abbildungskörper M die Größe λ_ω das Bild von γ_ω, so bilden, wie aus den Eigenschaften 1) und 2) folgt, die in M vor λ_ω gehenden Größen einen Abbildungskörper M_ω von K_ω. Bezeichnen wir weiter den Körper, in welchen K durch φ übergeführt wird, durch $\overline{K}$, so muß, da λ_ω in M vorkommt, auch der Körper $\overline{K}(\lambda_\omega)$ in M vorkommen und ein Bild des Körpers $K(\gamma_\omega)$ sein. Die Permutation, die K_ω in M_ω überführt, bezeichnen wir durch Ω_ω. Die Permutation, die $K(\gamma_\omega)$ in $\overline{K}(\lambda_\omega)$ überführt, soll durch Γ_ω bezeichnet werden. Dann stimmen die auf D_ω bezüglichen Reste der Permutationen Ω_ω und Γ_ω überein, weil sie mit dem auf D_ω bezüglichen Reste der $K_{\omega+1}$ in $M_\omega(\lambda_\omega)$ überführenden Permutation identisch sind. Diese Reste bezeichnen wir durch Δ_ω. Nun haben wir früher jeder Permutation des Körpers D_ω eine Permutation des Körpers $K(\gamma_\omega)$ zugeordnet. Es ist also auch der Permutation Δ_ω eine Permutation Γ'_ω zugeordnet worden. Stimmt nun für jedes in M vorkommende λ_ω Γ'_ω mit Γ_ω überein, so soll M ein *ausgezeichneter Abbildungskörper* genannt

*) Eine solche Wohlordnung ist auch von Herrn *Steinitz* (a. a. O. S. 271—279) in seinem Beweise angewandt worden.

werden. Wir beweisen nun folgende Eigenschaften der ausgezeichneten Abbildungskörper.

a) *Es gibt ausgezeichnete Abbildungskörper.* Z. B. ist $\overline{K}$ ein solcher Abbildungskörper. Führt die Permutation I_1'', die hier eine eindeutig bestimmte ist, γ_1 in λ_1 über, so ist der Körper $\overline{K}(\lambda_1)$ ein ausgezeichneter Abbildungskörper. Bezeichnen wir die $K(\gamma_1)$ in $\overline{K}(\lambda_1)$ überführende Permutation durch $\overline{I}_1'$, und ist $\overline{\Delta}_2$ der auf D_2 bezügliche Rest von $\overline{I}_1'$, so haben wir dieser Permutation eine auf $K(\gamma_2)$ bezügliche zugeordnet, die durch $\overline{I}_2'$ bezeichnet sei. Wird γ_2 durch $\overline{I}_2'$ in λ_2 übergeführt, so ist der Körper $\overline{K}(\lambda_1, \lambda_2)$ ein ausgezeichneter Abbildungskörper. Denn da $\overline{I}_1'$ und $\overline{I}_2'$ in bezug auf D_2 übereinstimmen, gibt es eine Permutation des aus den in bezug auf K normalen Körpern $K(\gamma_1)$ und $K(\gamma_2)$ zusammengesetzten Körpers $K(\gamma_1, \gamma_2)$, die, nach dem in 5. bewiesenen Hülfssatze, ein Multiplum von $\overline{I}_1'$ und $\overline{I}_2'$ ist und den Körper $K(\gamma_1, \gamma_2)$ in $\overline{K}(\lambda_1, \lambda_2)$ überführt. Usw.

b) *Sind zwei ausgezeichnete Abbildungskörper L_1 und L_2 die Bilder von einem und demselben Abschnitte von W, so stimmen sie überein.* Ist α die erste Größe aus W, deren Bilder nicht übereinstimmen, so muß es ein erstes γ_ω geben, von der Art, daß $\gamma_\omega \leqq \alpha < \gamma_{\omega+1}$ ist*). Es ist nämlich γ_ω das erste derjenigen γ_μ, für welche α im Körper $K_\omega(\gamma_\omega)$ enthalten ist. Dann sind die Abbildungen Ω_ω von K_ω in beiden Körpern noch dieselben. Es stimmen folglich die Δ_ω für L_1 und L_2 überein, folglich auch die Permutationen I_ω', da sie nach der Definition der ausgezeichneten Abbildungskörper, lediglich durch Δ_ω bestimmt sind. Nun ist, nach dem in 5. bewiesenen Hülfssatz, die Permutation $\Omega_{\omega+1}$ des aus den in bezug auf K normalen Körpern K_ω und $K(\gamma_\omega)$ zusammengesetzten Körpers $K_{\omega+1}$ durch Ω_ω und I_ω' eindeutig bestimmt. Die Größe α befindet sich aber im Körper $K_{\omega+1}$, wird folglich in beiden Körpern L_1 und L_2 ein und dasselbe Bild haben, das ihr durch $\Omega_{\omega+1}$ zugeordnet ist.

c) *Sind zwei beliebige ausgezeichnete Abbildungskörper gegeben, so sind sie entweder identisch, oder einer von ihnen ist ein Abschnitt des andern.* Bilden beide Körper denselben Abschnitt von W ab, so sind sie nach dem unter b) bewiesenen, identisch. Ist aber der durch den ersten Körper

*) Vgl. *Steinitz*, a. a. O., S. 277, Satz 9.

abgebildete Abschnitt von W ein echter Teil des durch den zweiten Körper abgebildeten, so besitzt der zweite Körper einen Unterkörper, der ein ausgezeichneter Abbildungskörper ist und denselben Abschnitt von W abbildet wie der erste, folglich mit dem ersten Körper identisch ist.

d) *Die Gesamtheit* M *aller Größen, die in irgendwelchen ausgezeichneten Abbildungskörpern enthalten sind, bildet einen ausgezeichneten Abbildungskörper*, wenn man diese Größen ebenso ordnet wie in den verschiedenen ausgezeichneten Abbildungskörpern, in welchen sie enthalten sind, was auf Grund der Eigenschaft c) immer möglich ist. Denn M enthält die Bilder der Abschnitte von W, die in irgendeinem ausgezeichneten Abbildungskörper enthalten sind, die folglich in ihrer Gesamtheit einen Abschnitt von W bilden. Diese Abbildung ist eine Permutation, denn jedes endliche System der Größen aus M ist in einem ausgezeichneten Abbildungskörper enthalten, der die letzte Größe des Systems enthält. M wird also ein Abbildungskörper sein. Enthält endlich M das Bild irgendeines γ_ω, so muß für M I''_ω mit I'_ω übereinstimmen, da sowohl das Bild von K_ω, als auch das von $K(\gamma_\omega)$ in irgendeinem ausgezeichneten Abbildungskörper enthalten ist. M ist folglich ein ausgezeichneter Abbildungskörper.

e) M *enthält Bilder aller Größen von* W *in* M, *die Abbildung von* W *bildet folglich wirklich eine die Permutation* φ *enthaltende Permutation* ψ *des Körpers* $W = U$.

Ist δ die erste Größe aus W, die nicht in M abgebildet ist, so muß δ eines der γ sein, denn wäre $\gamma_\omega < \delta < \gamma_{\omega+1}$, so würde δ in $K_{\omega+1}$ enthalten sein, folglich in der Abbildung von $K_{\omega+1}$ in M abgebildet werden (denn da alle vor δ gehende Größen ihre Bilder in M haben, so muß in M der ganze Körper K_ω und die Größe γ_ω, folglich auch, weil M ein Körper ist, der Körper $K_{\omega+1}$ abgebildet werden). Ist δ gleich γ_ω, so bilden wir die zu Δ_ω gehörige Permutation I'_ω von $K(\gamma_\omega)$. Dann stimmt I''_ω mit Ω_ω in bezug auf D_ω überein. Dem in 5. bewiesenen Hülfssatze zufolge gibt es eine Permutation des aus den in bezug auf K *normalen* Körpern K_ω und $K(\gamma_\omega)$ zusammengesetzten Körpers $K_{\omega+1}$, die Ω_ω und I'_ω zu den auf K_ω und $K(\gamma_\omega)$ bezüglichen Resten hat. Werden die Größen des Abbildungskörpers M′, in welchen $K_{\omega+1}$ durch diese Permutation übergeführt wird, ebenso geordnet wie die entsprechenden Größen in W, so müßte M nur ein Abschnitt des ausgezeichneten Abbildungskörpers M′ sein, was der

Annahme widerspricht, daß M alle in irgendeinem ausgezeichneten Abbildungskörper vorkommenden Größen enthält. Es muß folglich auch δ in M enthalten sein. Damit ist unser Hauptsatz vollständig bewiesen.

8. *Folgerungen aus dem Hauptsatze.* Es sei U eine beliebige unendliche algebraische Erweiterung erster Art, L ein in bezug auf K endlicher Unterkörper von U. Es sei φ' eine der Permutationen von L, die Multipla von φ sind. Ich betrachte nun die Normen der Körper L und U in bezug auf K und bezeichne diese Normen durch $\bar{L}$ bzw. $\bar{U}$. Dann ist $\bar{U}$ eine normale Erweiterung von $\bar{L}$. Bezeichnet $\bar{\varphi}$ irgendeine Permutation von $\bar{L}$, die φ' zu dem auf L bezüglichen Reste hat, so besitzt $\bar{U}$ eine Permutation, die ein Multiplum von $\bar{\varphi}$ ist. Es besitzt dann U eine Permutation, die ein Multiplum von φ' ist. Der Körper U besitzt also wenigstens so viele verschiedene Permutationen, welche Multipla von φ sind, wie es verschiedene Permutationen φ' gibt. Die Anzahl der verschiedenen Permutationen φ', die φ enthalten, ist aber dem Grade von L in bezug auf K gleich. Und da der Körper U die Unterkörper von beliebig hohem endlichem Grade in bezug auf K besitzt, so folgt, daß es *unendlich viele* Permutationen des Körpers U gibt, die φ enthalten*).

Um uns nun von den beschränkenden Voraussetzungen über den Körper U zu befreien, beweisen wir *erstens* den folgenden Hülfssatz. *Ist L eine algebraische Erweiterung zweiter Art des Körpers K und besitzt K die Permutation φ, so besitzt L eine und nur eine Permutation ψ, die φ enthält.* Jede Größe δ aus L genügt einer Gleichung

$$\delta^{p^f} = \gamma, \tag{1.}$$

wo γ dem Körper K angehört. Führt ψ δ in δ', γ in γ' über, so müssen die Größen δ' und γ' der Gleichung genügen

$$\delta'^{p^f} = \gamma'. \tag{2.}$$

Hier ist δ' durch γ' vollkommen bestimmt**). Und da γ' gleich

*) Vgl. *Dedekind*, Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen, S. 9—11. Wir werden im folgenden diesen Satz nur für den Fall zu benutzen haben, wo U aus K durch Adjunktion einer abzählbaren Menge von Größen entsteht. Schon für diesen Fall hat die Menge aller gesuchten Permutationen, wie sehr leicht zu zeigen ist, die Mächtigkeit des Kontinuums.

**) Denn die Gleichung $x^{p^f} = \gamma'$ hat in einem Körper mit der Charakteristik p *nur eine* Wurzel. Sie kann nämlich in der Form geschrieben werden: $x^{p^f} - \gamma' = x^{p^f} - \delta'^{p^f} = (x - \delta')^{p^f} = 0$.

$\varphi(\gamma)$ ist, so kann es nur eine Permutation ψ geben, die φ enthält. Ordnen wir aber jeder Größe δ die durch (1.) und (2.) bestimmte δ' zu, so bekommen wir in der Tat eine Permutation. Denn wenn δ und δ_1 den Gleichungen genügen

$$\delta^{p^f} = \gamma, \quad \delta_1^{p^{f_1}} = \gamma_1,$$

so sind δ' und δ_1' durch die Gleichungen bestimmt

$$\delta'^{p^f} = \varphi(\gamma), \quad \delta_1'^{p^{f_1}} = \varphi(\gamma_1).$$

Dann genügen $\delta \pm \delta_1$, $\delta\delta_1$, $\frac{\delta}{\delta_1}$ den folgenden Gleichungen, wo durch β und β_1 die Größen $\beta_1 = \gamma_1^{p^{f_1(f-1)}}$, $\beta = \gamma^{p^{f(f_1-1)}}$ bezeichnet sind:

$$(3.) \quad (\delta \pm \delta')^{p^{ff_1}} = \beta \pm \beta_1; \quad (\delta\delta_1)^{p^{ff_1}} = \beta\beta_1; \quad \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{p^{ff_1}} = \frac{\beta}{\beta_1},$$

die letzte natürlich für $\beta_1 \neq 0$. Dementsprechend genügen $\delta' \pm \delta_1'$, $\delta'\delta_1'$, $\frac{\delta'}{\delta_1'}$ den Gleichungen (wo β', β_1' die Größen bezeichnen $(\varphi(\gamma))^{p^{f(f_1-1)}}$, $(\varphi(\gamma))^{p^{f_1(f-1)}}$):

$$(4.) \quad (\delta' \pm \delta_1')^{p^{ff_1}} = \beta' \pm \beta_1'; \quad (\delta'\delta_1')^{p^{ff_1}} = \beta'\beta_1'; \quad \left(\frac{\delta'}{\delta_1'}\right)^{p^{ff_1}} = \frac{\beta_1'}{\beta_1}.$$

Nun gilt aber

$$(5.) \quad (\beta' \pm \beta_1') = \varphi(\beta \pm \beta_1); \quad (\beta'\beta_1') = \varphi(\beta\beta_1); \quad \frac{\beta'}{\beta_1'} = \varphi\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right).$$

Aus (3.), (4.), (5.) ergibt sich also

$$(\delta' \pm \delta_1') = (\delta \pm \delta_1)'; \quad (\delta'\delta_1') = (\delta\delta_1)'; \quad \frac{\delta'}{\delta_1'} = \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)'.$$

Damit wird der Hülfssatz bewiesen sein, wenn wir noch zeigen, daß es gleichgültig ist, welche von den verschiedenen Gleichungen von der Art

$$x^{p^f} = \gamma,$$

denen δ in K genügt, wir für die Bestimmung von δ' zu Grunde legen. Sind zwei solche Gleichungen

$$(\text{I.}) \ \delta^{p^f} = \gamma; \quad (\text{II.}) \ \delta^{p^{f_1}} = \gamma_1 \qquad (f > f_1)$$

und bezeichnen wir zur Abkürzung $f - f_1$ durch e, so folgt aus (II.)

$$\delta^{p^f} = \gamma_1^{p^e}$$

und daraus auf Grund von (I.)

$$\gamma = \gamma_1^{p^e}; \quad \varphi(\gamma) = (\varphi(\gamma_1)^{p^e}.$$

Die beiden zur Bestimmung von δ' dienenden Gleichungen

$$(\text{I}'.) \ \delta'^{p^f} = \varphi(\gamma); \quad (\text{II}'.) \ \delta'^{p^{f_1}} = \varphi(\gamma_1)$$

sind daher äquivalent, wie aus

$$\delta'^{p^f} - \varphi(\gamma) = \delta'^{p^f} - (\varphi(\gamma_1))^{p^e} = (\delta'^{p^{f_1}} - \varphi(\gamma_1))^{p^e}$$

ersichtlich ist*).

*) Auch dieser Satz ist in der *Steinitz*schen Arbeit enthalten. A. a. O., S. 283, Satz 5.

Es sei *zweitens* L eine rein transzendente Erweiterung von K, welche aus K durch Adjunktion eines Systems von untereinander in bezug auf K algebraisch unabhängigen Elementen α hervorgeht. Dann ist jede Größe des Körpers L durch eine endliche Anzahl der α rational mit Koeffizienten aus K ausdrückbar, und zwar auf eine einzige Weise, wie aus der Unabhängigkeit der α folgt. Machen wir jetzt in den Koeffizienten dieser Darstellung irgendeine Permutation φ des Körpers K, so erhalten wir eine Permutation des Körpers L, die φ enthält, wenn nur die α auch in bezug auf den Körper $\varphi(K)$ unabhängig bleiben. Dies wird immer der Fall sein, wenn der Körper K durch die Permutation φ in sich selbst übergeführt wird*). Es sei nun φ eine Permutation des Körpers K, die K in sich selbst überführt, L eine ganz beliebige Erweiterung des Körpers K. Dann kann, nach den in 1. angeführten *Steinitz*schen Sätzen, die Erweiterung L in drei Schritten ausgeführt werden. Mit dem ersten machen wir eine rein transzendente Erweiterung von K zu einem Körper L_1. Mit dem zweiten Schritte adjungieren wir zu L_1 alle in L enthaltenen in bezug auf L_1 algebraischen Größen erster Art. Wir gelangen dann zu einem Körper L_2, in bezug auf welchen L ein Wurzelkörper sein wird. Dann gibt es, nach den eben bewiesenen Sätzen, eine Permutation des Körpers L_1, dann von L_2 und endlich des Körpers L, die φ enthält.

Wir wenden diese Resultate auf den Fall des Körpers aller reellen Zahlen, den wir durch X bezeichnen wollen, an.

Es sei $R(\gamma)$ ein endlicher Körper über dem Körper R aller rationalen Zahlen, φ irgendeine Permutation dieses Körpers. Ist dann K irgendeine in bezug auf R normale und endliche Erweiterung des Körpers R, die in sich $R(\gamma)$ enthält, so besitzt, den eben abgeleiteten Sätzen zufolge, jede Permutation von K ein auf X bezügliches Multiplum. Ist der Relativgrad von K in bezug auf $R(\gamma)$ gleich n, so gibt es genau n Permutationen von K, die Multipla von φ sind. Es gibt daher wenigstens n verschiedene Permutationen von X, die φ enthalten. Da aber n beliebig

*) Das wird, wie nicht schwer zu zeigen ist, auch für solche Körper K der Fall sein, die eine *algebraische* Erweiterung eines Körpers M darstellen, welcher durch den auf ihn bezüglichen Rest von φ in sich selbst übergeht. Auf die genauere Untersuchung der Permutationen φ, die diese Eigenschaft nicht besitzen, gehen wir nicht ein. Vgl. *Steinitz*, a. a. O., S. 307—308.

groß gewählt werden kann, so gibt es unendlich viele Permutationen von X, die Vielfache von φ sind. Nimmt man z. B. $\sqrt{2}$ für die Größe γ, so gibt es also unendlich viele Permutationen des Körpers aller reellen Zahlen, die $+\sqrt{2}$ in $-\sqrt{2}$ überführen. Damit ist eine von Herrn *Dedekind* im Jahre 1900 gestellte Frage nach der Existenz gewisser Permutationen des Körpers aller reellen Zahlen beantwortet*).

§ 3.

Nunmehr wenden wir uns zum eigentlichen Gegenstande dieser Arbeit, zu der Untersuchung der algebraisch abgeschlossenen Erweiterungen der perfekten Körper. Wir beweisen zunächst drei Hülfssätze.

1. *Endliche Erweiterungen erster Art. Jede endliche Erweiterung erster Art eines perfekten Körpers ist perfekt.* Es seien die Glieder einer Fundamentalreihe

$$q_1, q_2, \dots q_n, \dots \qquad (n=1,2,\dots) \tag{1.}$$

einer endlichen Erweiterung L des Körpers K durch die Basis ausgedrückt:

$$q_i = a_i e_1 + b_i e_2 + \dots + d_i e_m, \tag{2.}$$

wo $a_i, b_i, \dots d_i$ Größen des Körpers K sind, $e_1, e_2, \dots e_m$ aber die in bezug auf den Körper K linear unabhängigen Basiselemente des Körpers L bezeichnen. Dann, behaupte ich, sind auch die Reihen

$$\dots a_n \dots, \dots b_n \dots, \dots, \dots d_n \dots \tag{3.}$$

Fundamentalreihen. Ersetzen wir nämlich die q durch ihre in bezug auf K konjugierten Größen $q^{(k)}$, so hat $q_{n+p}^{(k)} - q_n^{(k)}$ dieselbe Bewertung, wie $q_{n+p} - q_n$, da diese Differenz derselben in K irreduziblen Gleichung genügt. Es können daher die Größen

$$\| q_{n+p}^{(k)} - q_n^{(k)} \| \qquad (p > 0) \qquad (k=0,1,\dots)$$

mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden. Ich betrachte nun die zu der Matrix

$$\begin{matrix} e_1, & e_2, & \dots & e_m \\ e_1', & e_2', & \dots & e_m' \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ e_1^{(m-1)}, & e_2^{(m-1)}, & \dots & e_m^{(m-1)} \end{matrix} \tag{I.}$$

reziproke Matrix

*) *Dedekind*, Über die Permutationen des Körpers usw.

$$\text{(II.)} \qquad \begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_1', & \dots & \varepsilon_1^{(m-1)} \\ \varepsilon_2, & \varepsilon_2', & \dots & \varepsilon_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \varepsilon_m, & \varepsilon_m', & \dots & \varepsilon_m^{(m-1)}, \end{matrix}$$

wo jedes $\varepsilon_k^{(i)}$ der algebraischen Adjungierten des Elementes $e_i^{(k)}$ dividiert durch die Determinante Δ der Matrix (I.) gleich ist. Die Determinante Δ ist von 0 verschieden. Wir können z. B. für die e_i die Potenzen eines primitiven Elementes des Körpers L wählen. Dann ist das Quadrat der Determinante Δ der Diskriminante einer in K irreduziblen Gleichung gleich, also von 0 verschieden, da L von der ersten Art ist. Ist jetzt ε eine beliebig kleine positive Zahl, so wähle ich N so groß, daß die Ungleichungen erfüllt sind:

$$\|q_{n+p} - q_n\| < \varepsilon, \qquad n > N,\ p > 0.$$

Dann sind zugleich die Ungleichungen erfüllt:

$$\|q_{n+p}^{(k)} - q^{(k)}\| < \varepsilon, \qquad n > N. \qquad (k=1, 2, \dots m-1)$$

Nun folgen aus den Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} (q_{n+p}^{(k)} - q_n^{(k)})\,\varepsilon_1^{(k)} = (a_{n+p} - a_n); \dots; \sum_{k=0}^{k=m-1} (q_{n+p}^{(k)} - q_n^{(k)})\,\varepsilon_m^{(k)} = (d_{n+p} - d_n)$$

die Ungleichungen

$$\|a_{n+p} - a_n\| < \varepsilon \cdot \Sigma \|\varepsilon_1^{(k)}\|; \ \|b_{n+p} - b_n\| < \varepsilon \cdot \Sigma \|\varepsilon_2^{(k)}\|, \dots; \ \|d_{n+p} - d_n\| < \varepsilon \cdot \Sigma \|\varepsilon_m^{(k)}\|,$$

welche aussagen, daß die Folgen (3.) Fundamentalreihen sind. Da der Körper K nach der Voraussetzung perfekt ist, so besitzen die Reihen (3.) die im Körper K enthaltenen Grenzwerte, die wir durch $A, B, \dots D$ bezeichnen. Dann besitzt aber die Fundamentalreihe (1.) auf Grund der Darstellung (2.) den Limes

$$Ae_1 + Be_2 + \dots + De_m,$$

w. z. b. w. Dieser Beweis läßt sich *nicht* auf die endlichen Erweiterungen zweiter Art ausdehnen. Einen anderen Beweis dieses Satzes, welcher für *beliebige* endliche Erweiterungen gilt, werde ich in einer späteren Abhandlung mitteilen. Wir werden übrigens diesen Satz nur für die endlichen Erweiterungen *erster Art* zu benutzen haben.

2. *Unendliche algebraische Erweiterungen erster Art. Jede unendliche algebraische Erweiterung L von der ersten Art eines perfekten Körpers K*

ist nicht perfekt. Um dies zu zeigen, brauchen wir nur eine Fundamentalreihe aufzustellen, deren Elemente in L sich befinden, die aber in L keinen Limes besitzt. Zu dem Zwecke bezeichnen wir durch a irgendeine Größe aus K, die der Ungleichung genügt:

$$(1.) \qquad 0 < \|a\| < 1.$$

Es gibt immer in K eine solche Größe. Denn es gibt in K eine Größe, deren Bewertung von 0 und 1 verschieden ist. Entweder diese Größe oder ihre reziproke kann für a genommen werden. Es sei weiter

$$(2.) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots,$$

eine abzählbare Menge der Größen aus L, die nicht *alle zugleich* in einem in bezug auf K endlichen Körper enthalten sein sollen. Der kleinste Körper zwischen K und $\mathfrak{M}$, der alle α enthält ist folglich unendlich in bezug auf K, besitzt also unendlich viele Permutationen, die K in Ruhe lassen. Wir bezeichnen diesen Körper durch $\mathfrak{N}$. Nunmehr bilde ich die Reihe:

$$(3.) \qquad S = a^{\beta_1}\alpha_1 + a^{\beta_2}\alpha_2 + \cdots$$

wo β_i noch zu bestimmende ganze positive Zahlen bedeuten. Wir wollen nun zeigen, daß durch eine geeignete Wahl der β den folgenden Forderungen genügt werden kann:

a) Die Reihe (3.) soll konvergieren.

b) Die Werte, die der Ausdruck S erhält, wenn man auf die Größen α alle verschiedenen Permutationen des Körpers $\mathfrak{N}$, die K in Ruhe lassen, wirken läßt, sollen alle voneinander und von S verschieden sein*).

Wir betrachten irgendeine konvergente Reihe positiver Zahlen m:

$$(4.) \qquad m_1 + m_2 + \cdots = M$$

und bestimmen irgendwelche positiven ganzen Zahlen β_i', k den Ungleichungen gemäß:

$$(5.) \qquad (\text{I.}) \ \|a\|^{\beta_i'} \cdot \|\alpha_i\| < m_i; \qquad (\text{II.}) \ \|a\|^k < \frac{1}{2M},$$

was immer geschehen kann, wegen $\|a\| < 1$. Außerdem ordnen wir jeder Größe α_i die positiven Zahlen Δ_i und δ_i folgendermaßen zu. Jede Größe α_i ist algebraisch und von der ersten Art in bezug auf K. Sind die untereinander und von α_i verschiedenen Konjugierten von α_i in bezug auf K:

---

*) Die Existenz eines Körpers, in welchem alle diese Reihen einen Limes besitzen, ist ja durch den Satz des Herrn *Kürschák* gesichert.

$$\alpha_i', \alpha_i'', \dots \alpha_i^{(\nu_i-1)},$$

so sind die Zahlen

$$\| \alpha_i - \alpha_i^{(r)} \|, \quad \| \alpha_i^{(s)} - \alpha_i^{(t)} \| \qquad (r, s, t = 1, 2, \dots \nu_i - 1, s \gtrless t)$$

sämtlich von 0 verschieden und nur in endlicher Anzahl vorhanden. Die kleinste unter diesen Zahlen bezeichnen wir durch Δ_i und wählen dann die ganze positive Zahl δ_i irgendwie der Ungleichung gemäß

$$(6.) \qquad \| a \|^{\delta_i} < \Delta_i.$$

Und nun wählen wir sukzessive irgendwelche positiven ganzen Zahlen β_i, die nur den Ungleichungen genügen sollen:

$$(7.) \qquad \beta_i > \beta_i' + k + \delta_{i-1} + \sum_{p=1}^{i-1} \beta_p.$$

Dann genügt, behaupten wir, die Reihe (3.) den beiden Bedingungen a) und b). Aus (7.) folgt, da k, δ_p und β sämtlich positiv sind,

$$\beta_i > \beta_i',$$

also, auf Grund der Ungleichung (5.) I,

$$(8.) \qquad \| a \|^{\beta_i} \| \alpha_i \| < m_i,$$

und daraus folgt, daß *die Reihe* (3.) *bei dieser Wahl der* β *konvergiert*, weil, wie aus (8.) sich ergibt,

$$\| \sum_{p=1}^{p=q} a^{\beta_{n+p}} \alpha_{n+p} \| < \sum_{p=1}^{p=q} m_{n+p},$$

ist, die Summe $\sum_{p=1}^{p=q} m_{n+p}$ sich aber mit wachsendem n, wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{i=\infty} m_i$, der Grenze 0 nähert. Es seien jetzt φ_1 und φ_2 zwei voneinander verschiedene Permutationen des Körpers $\mathfrak{N}$, die K in Ruhe lassen. Diese Permutationen führen den Ausdruck (3.) in die folgenden über:

$$(3'.) \qquad S_1 = a^{\beta_1} \alpha_1' + a^{\beta_2} \alpha_2' + \cdots,$$

$$(3''.) \qquad S_2 = a^{\beta_1} \alpha_1'' + a^{\beta_2} \alpha_2'' + \cdots.$$

Die Größen α_i, α_i', α_i'' genügen einer und derselben in K irreduziblen Gleichung, haben folglich dieselbe Bewertung. Dasselbe gilt für die Summen

$$\sum_{p=1}^{p=q} a^{\beta_{n+p}} \alpha_{n+p}, \quad \sum_{p=1}^{p=q} a^{\beta_{n+p}} \alpha_{n+p}', \quad \sum_{p=1}^{p=q} a^{\beta_{n+p}} \alpha_{n+p}'',$$

und die Reihen (3'.) und (3''.) konvergieren folglich auch. Wir zeigen endlich, daß die Limes der Reihen (3'.) und (3''.) in den Körpern, in

welchen sie existieren, voneinander verschiedene Werte besitzen. Die konvergente Reihe

$$S_1 - S_2 = D = a^{\beta_1}(\alpha_1' - \alpha_1'') + a^{\beta_2}(\alpha_2' - \alpha_2'') + \cdots$$

hat nämlich einen von 0 verschiedenen Grenzwert. Um dies zu zeigen, bezeichnen wir durch β_e die erste der Größen β, für welche α_e'' und α_e' voneinander verschieden sind. — Es kann *nicht* für alle i gelten

$$\alpha_i'' = \alpha_i',$$

denn dann bewirken φ_1 und φ_2 dieselbe Permutation der α, sind also nicht voneinander verschiedene Permutationen, da $\mathfrak{N}$ aus K eben durch Adjunktion aller α hervorgeht. — Dann gilt die Ungleichung:

$$(9.) \qquad \| D \| \geqq \| a^{\beta_e}(\alpha_e' - \alpha_e'') \| - \left[\sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e+i}\alpha_{e+i}' \| + \sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e+i}\alpha_{e+i}'' \| \right].$$

Nun folgt aus den Ungleichungen (7.), da k und δ_i positiv sind, daß

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e+i}\alpha_{e+i}' \| < \| a \|^{\beta_e+\delta_e+k} \sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e'+i}\alpha_{e+i}' \|$$

ist. Aus (5.) I und (4.) folgt aber

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e'+i}\alpha_{e+i}' \| < M,$$

also muß nach (5.) II

$$(10.)\ \text{I} \qquad \sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e+i}\alpha_{e+i}' \| < \tfrac{1}{2} \| a^{\beta_e+\delta_e} \|$$

sein. Für die Summe $\sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e+i}\alpha_{e+i}'' \|$ bekommen wir ebenso dieselbe Abschätzung

$$(10.)\ \text{II} \qquad \sum_{i=1}^{i=\infty} \| a^{\beta_e+i}\alpha_{e+i}'' \| < \tfrac{1}{2} \| a^{\beta_e+\delta_e} \|.$$

Für $\| a^{\beta_e}(\alpha_e' - \alpha_e'') \|$ ergibt sich endlich, da nach (6.)

$$\| \alpha_e'' - \alpha_e' \| \geqq \Delta_e > \| a^{\delta_e} \|$$

ist, die Abschätzung:

$$(10.)\ \text{III} \qquad \| a^{\beta_e}(\alpha_e' - \alpha_e'') \| > \| a^{\beta_e+\delta_e} \|.$$

Setzen wir (10.) I, II, III in (9.) ein, so ergibt sich die Ungleichung:

$$\| D \| > 0,$$

die das Nichtverschwinden der Reihen D beweist. Jetzt sind wir im Stande zu beweisen, daß S nicht einmal algebraisch in bezug auf K ist, also sicher nicht in L enthalten ist. Nehmen wir an, die Größe S genüge einer Gleichung von endlichem Grade n mit Koeffizienten aus K

$$(11.) \qquad \Phi(S) = 0.$$

Die Größe S ist der Limes der Fundamentalreihe

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots,$$

wo σ_i die i-te Teilsumme der Reihe (3.) bedeutet. Wir haben daher

$$\Phi(\lim_{i=\infty} \sigma_i) = 0,$$

oder

$$\lim_{i=\infty} \Phi(\sigma_i) = 0,$$

also auch

$$\lim_{i=\infty} \| \Phi(\sigma_i) \| = 0. \tag{12.}$$

Ist nun φ irgendeine Permutation des Körpers L, deren auf $\mathfrak{R}$ bezüglicher Rest nicht identische Permutation ist, so führt φ S, σ_i in S', σ_i' über. S' ist von S verschieden, nach dem eben bewiesenen. Da die σ_i in bezug auf K algebraisch sind, so gilt dasselbe von $\Phi(\sigma_i)$, und $\Phi(\sigma_i')$ genügt derselben in K irreduziblen Gleichung wie $\Phi(\sigma_i)$, besitzt daher dieselbe Bewertung wie $\Phi(\sigma_i)$. Aus

$$\| \Phi(\sigma_i') \| = \| \Phi(\sigma_i) \|$$

folgt aber nach (12.)

$$\lim_{i=\infty} \| \Phi(\sigma_i') \| = 0$$

oder

$$\lim_{i=\infty} \Phi(\sigma_i') = 0,$$

also

$$\Phi(\lim_{i=\infty} \sigma_i') = 0$$

und endlich

$$\Phi(S') = 0.$$

Jede Größe, in welche S durch die Anwendung irgendeiner Permutation von $\mathfrak{R}$ übergeführt wird, genügt also derselben in K irreduziblen Gleichung wie S. Es gibt aber, nach dem eben bewiesenen, unendlich viele solche Größen, die alle untereinander verschieden sind. Die Gleichung, welcher S in K genügt, muß also unendlich viele untereinander verschiedene Wurzeln in einer geeigneten Erweiterung von K besitzen. Das ist aber unmöglich. Die Größe S kann folglich nicht algebraisch sein. — Daß ein solcher Erweiterungskörper, in welchem alle betrachteten Fundamentalreihen einen Limes besitzen, jedenfalls existiert, geht aus der Untersuchung des Herrn *Kürschak* unmittelbar hervor. Denn ein solcher Körper ist z. B. der derivierte Körper der kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterung von K.

3. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung des perfekten Körpers* K, $\mathfrak{N}$ *der Körper, der aus* K *durch Adjunktion aller in* $\mathfrak{M}$ *enthaltenen Elemente von der ersten Art in bezug auf* K *entsteht. Ist der Körper* $\mathfrak{N}$ *endlich in bezug auf* K, *so ist auch der Körper* $\mathfrak{M}$ *endlich und fällt mit* $\mathfrak{N}$ *zusammen, enthält also nur die Größen von der ersten Art in bezug auf* K. Ist folglich die kleinste algebraisch abgeschlossene Eweiterung des Körpers K *unendlich* in bezug auf K, so gibt es immer eine in bezug auf K *unendliche* algebraische Erweiterung *erster Art.* — *Beweis.* Es sei die Charakteristik des Körpers K gleich p. Ist α eine Größe aus $\mathfrak{M}$ von der zweiten Art in bezug auf K, ist sie also nicht in K enthalten, so kann sie auch nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten sein. Denn durch Adjunktion der Größen von der ersten Art entsteht, nach einem Satze von *Steinitz**), eine algebraische Erweiterung von der ersten Art, die also keine Elemente von der zweiten Art enthalten kann. Die Größe α genügt einer Gleichung von der Gestalt

$$\alpha^{p^n} = Q,$$

wo Q eine Größe des Körpers K ist. Zeigen wir aber, daß im Körper $\mathfrak{N}$, falls er endlich in bezug auf K ist, die Ausziehung der p-ten Wurzeln unbeschränkt möglich ist, so wird daraus folgen, daß α in $\mathfrak{N}$, also schon in K sich befindet. Um diesen Beweis zu führen, benutze ich die Tatsache, daß $\mathfrak{N}$ als eine endliche Erweiterung von der ersten Art eines perfekten Körpers auch perfekt sein muß (nach 1.). Jede Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{N}$ mit nicht verschwindender Diskriminante besitzt in $\mathfrak{N}$ nach der Definition dieses Körpers eine Wurzel. Um nun die Gleichung

$$x^p = Q \tag{1.}$$

aufzulösen, wählen wir im Körper K irgendeine Größe a, für welche $0 < \|a\| < 1$ ist, und betrachten die Gleichungen:

$$\Phi_i(x) = x^p + a^i x - Q = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{2.}$$

Die Diskriminante jeder dieser Gleichungen verschwindet nicht, denn sonst müßte die Ableitung von $x^p + a^i x - Q$, d. h. a^i, einen von x abhängigen Faktor besitzen. Jedes $\Phi_i(x)$ hat folglich in $\mathfrak{N}$ eine Wurzel α_i**). Wir werden jetzt die Folge betrachten

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{3.}$$

---

*) *Steinitz*, a. a. O., S. 235. Satz 8.

**) Sie besitzt natürlich p Nullstellen, für das folgende ist es aber völlig belanglos, welche von diesen Wurzeln für α_i genommen wird.

und nachweisen, daß diese Folge eine Fundamentalreihe ist und daß der in $\mathfrak{N}$ enthaltene Limes dieser Fundamentalreihe eine Wurzel der Gleichung (1.) ist. Um zuerst zu zeigen, daß (3.) eine Fundamentalreihe ist, leiten wir eine Abschätzung her für die Bewertung der Differenz:

$$\alpha_{n+s} - \alpha_n.$$

Aus der Gleichung

$$x^p + a^i x - Q = 0$$

folgt

$$\|x^p\| \leqq \|Q\| + \|a\|^i \|x\|.$$

Bezeichnen wir $\|Q\|$ und $\|a\|$ durch q und c, so folgt, daß $\|x\|$ nicht größer ist als die größte Wurzel der Gleichung

$$Y^p - c^i Y - q = 0, \tag{4.}$$

die natürlich im Bereiche aller reellen Zahlen betrachtet wird. Die Zahlen c und q sind positiv. Die größte Wurzel von (4.) ist aber, falls i groß genug genommen ist, kleiner als $2\sqrt[p]{q}$, da die Ungleichung

$$z^p - c^i z - q > 0$$

für hinreichend große Werte von i (da $0 < c < 1$ ist) durch alle z erfüllt ist, die größer als $2\sqrt[p]{q}$ sind. Wir bekommen also für alle i, die größer sind als eine gewisse ganze Zahl N_1, die Abschätzung:

$$\|\alpha_i\| < 2\sqrt[p]{q}. \tag{5.}$$

Jetzt subtrahieren wir die Gleichungen:

$$\text{(6.)} \quad \text{(I.)}\ \alpha_n^p + a^n \alpha_n - Q = 0; \quad \text{(II.)}\ \alpha_{n+s}^p + a^{n+s} \alpha_{n+s} - Q = 0 \quad (s > 0)$$

voneinander. Aus der Gleichung

$$(\alpha_n^p - \alpha_{n+s}^p) + a^n (\alpha_n - a^s \alpha_{n+s}) = 0$$

folgt, da K die Charakteristik p hat, die Formel

$$(\alpha_n - \alpha_{n+s})^p = -a^n (\alpha_n - a^s \alpha_{n+s}),$$

oder, wenn wir zu den Bewertungen übergehen und dabei die Ungleichungen

$$0 < \|a\| < 1, \quad \|\alpha_n - a^s \alpha_{n+s}\| \leqq \|\alpha_{n+s}\| \cdot \|a\|^s + \|\alpha_n\| \qquad (s > 0)$$

berücksichtigen:

$$\|\alpha_n - \alpha_{n+s}\| < \|a\|^{\frac{n}{p}} \{\|\alpha_{n+s}\| + \|\alpha_n\|\}.$$

Wählen wir jetzt n größer als N_1, so ergibt sich aus (5.)

$$\|\alpha_n - \alpha_{n+s}\| < 4\sqrt[p]{\|Q\|} \cdot \|a\|^{\frac{n}{p}}.$$

Für jede beliebig kleine positive Zahl ε kann man nun eine solche Zahl N finden, daß

$$\|a\|^{\frac{N}{p}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{4\|Q\|}}$$

sein wird. Dann gilt für jede Zahl n, die größer als die größere der Zahlen N_1 und N ist, die Ungleichung:

$$\|\alpha_n - \alpha_{n+s}\| < \varepsilon, \qquad (s > 0)$$

die die Konvergenz der Folge (3.) beweist. Wir bezeichnen den in $\mathfrak{N}$ enthaltenen (da ja $\mathfrak{N}$, wie schon bemerkt, perfekt ist) Limes dieser Folge durch A. Dann erhält man:

$$\mathsf{A}^p - Q = (\lim_{i=\infty} \alpha_i)^p - Q = \lim_{i=\infty} (\alpha_i^p - Q);$$

α_i genügt aber der Gleichung

$$\alpha_i^p + a^i \alpha_i - Q = 0,$$

aus welcher folgt

$$\|\mathsf{A}^p - Q\| = \lim_{i=\infty} \|-a^i \alpha_i\|.$$

Daraus folgt weiter nach (5.)

$$\|\mathsf{A}^p - Q\| = \lim_{i=\infty} \|a\|^i \cdot \|\alpha_i\| < 2\sqrt[p]{\|Q\|} \lim_{i=\infty} \|a\|^i.$$

Es ist aber $\lim \|a\|^i = 0$, da $\|a\| < 1$ ist, also, da die Bewertungen nicht negativ sein können,

$$\|\mathsf{A}^p - Q\| = 0$$

oder

$$\mathsf{A}^p = Q.$$

Damit ist auch dieser Hülfssatz vollständig bewiesen.

4. *Die algebraisch abgeschlossenen Erweiterungen der perfekten bewerteten Körper.* Es sei $\mathfrak{M}$ die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung des perfekten Körpers K. Ist $\mathfrak{M}$ unendlich in bezug auf K, so besitzt $\mathfrak{M}$, nach dem in 3. bewiesenen Hülfssatze, einen Unterkörper $\mathfrak{N}$, der in bezug auf K unendlich und von der ersten Art ist. Dann kann man, nach dem zweiten Hülfssatze in 2. in $\mathfrak{N}$ eine Fundamentalreihe konstruieren, deren Limes nicht algebraisch in bezug auf K, also auch nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten sein kann. Dann ist folglich der Körper $\mathfrak{M}$ nicht perfekt. Ist dagegen $\mathfrak{M}$ endlich in bezug auf K, so ist nach dem dritten Hülfssatze, eine endliche Erweiterung erster Art des Körpers K, also, nach dem ersten Hülfssatze, auch perfekt. Damit haben wir das Hauptergebnis dieser Untersuchung gewonnen:

„Die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung eines perfekten Körpers ist dann und nur dann perfekt, wenn sie endlich in bezug auf diesen Körper ist.“

Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimrat *Hensel*, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, für das grosse Interesse, das er meiner Untersuchung entgegengebracht hat, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Inhaltsübersicht.

Seite

§ 1. Einleitung. Die Theorie der Bewertungen. Die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $K(p)$ 255

§ 2. Permutationen.

1. Einige Sätze aus der Körpertheorie 260
2. Abbildungen und Permutationen 262
3. Die Permutationen der endlichen Erweiterungen erster Art 263
4. Normale Erweiterungen erster Art 264
5. Die Permutationen der normalen Erweiterungen 265
6. Der Hauptsatz. Vorbereitungen zum Beweise des Hauptsatzes . . . 267
7. Beweis des Hauptsatzes 269
8. Folgerungen aus dem Hauptsatze 272

§ 3. Algebraisch abgeschlossene Erweiterungen perfekter Körper.

1. Endliche Erweiterungen erster Art 275
2. Unendliche algebraische Erweiterungen erster Art 276
3. Abgeschlossene Erweiterungen zweiter Art 281
4. Beliebige algebraisch abgeschlossene Erweiterungen 283

Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe.

Von Herrn *Lothar Koschmieder* in Liegnitz.

Die Theorie der Wärmeleitung nach *Fourier* sieht die gegenseitigen Entfernungen der Moleküle des Wärmeleiters als unveränderlich an; die elastischen Verrückungen der Moleküle bei dem Vorgange der Wärmeleitung haben *Duhamel**) und *Franz Neumann***) berücksichtigt.

So wie die lineare Wärmeleitung nach *Fourier* das einfachste physikalische Beispiel für homogene Integralgleichungen mit symmetrischem Kern liefert, so hat man in dem linearen *Duhamel*schen Problem wohl den nächstliegenden physikalisch interessanten Fall einer homogenen Integralgleichung mit unsymmetrischem Kern vor sich, bei welchem eine Entwicklung willkürlicher Funktionen gefordert wird. Probleme der erstgenannten Art behandelt der erste Abschnitt des Werkes von *Kneser*, „Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik“***); für unsymmetrische Kerne ist die Entwicklung willkürlicher Funktionen außer in den Arbeiten von *Hilb*†) und *Haupt*††) noch in keinem einfachen physikalischen Beispiel durchgeführt, was hiermit im folgenden geschieht.

Aus den von *Duhamel*†††) angegebenen allgemeinen Gleichungen

---

*) Mém. prés. à l'Acad. de Paris T. V (1838) p. 440; Journal de l'école polytechnique T. XV, Cah. 25.

**) Vorlesungen über die Theorie der Elastizität (1885), S. 107 ff.

***) Braunschweig 1911.

†) Math. Annalen Bd. 71 und dieses Journal Bd. 140.

††) Sitzungsber. der Kgl. Bayerischen Akad., Math.-phys. Klasse, 4. Mai 1912.

†††) a. a. O., p. 31 f.

folgen für einen linearen Leiter von der Länge Eins, dessen Enden auf der konstanten Temperatur Null gehalten werden, wenn ein äußerer Druck nicht vorhanden ist, die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \tag{1.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.}$$

mit den Randbedingungen

$$V\Big|^{0,1} = 0, \tag{3.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{0,1} = 0; \tag{4.}$$

hierin bedeutet x den Abstand vom Endpunkte 0 des Stabes, t die Zeit, V die Temperatur, u die elastische Verrückung, a^2, b^2, c^2 sind Konstanten. Partikuläre Lösungen des Problems sind, wenn C_n eine Konstante bedeutet,

$$V_n = C_n e^{-\frac{a^2 c^2 n^2 \pi^2}{b^2 + c^2} t} n\pi c^2 \sin n\pi x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5.}$$

$$u_n = C_n e^{-\frac{a^2 c^2 n^2 \pi^2}{b^2 + c^2} t} (1 - \cos n\pi x). \tag{6.}$$

Hierbei ist die in dem Raumfaktor von u_n auftretende additive Konstante, die willkürlich bleibt, weil die Randbedingungen nur die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ enthalten, so bestimmt, daß der Koordinatenanfangspunkt fest ist (diese Verfügung trifft auch *Duhamel*).

Ein vorgeschriebener Anfangszustand

$$V\Big|^{t=0} = M(x), \; u\Big|^{t=0} = N(x) \tag{7.}$$

fordert die Entwicklung einer willkürlichen Funktion sowohl nach den Raumfaktoren von V_n

$$\mathfrak{X}_n(x) = C_n n\pi c^2 \sin n\pi x \tag{8.}$$

als auch nach denen von u_n

$$X_n(x) = C_n(1 - \cos n\pi x). \tag{9.}$$

Die Möglichkeit solcher Entwicklungen liegt auf der Hand, weil es sich um einfache *Fourier*sche Reihen handelt, aber die Entwicklung nach den Funktionen (9.) hat dadurch Interesse, daß sie zusammen mit einer leicht zu bildenden Reihe anderer Funktionen ein Biorthogonalsystem bilden, während die Funktionen (8.) einem Orthogonalsystem angehören.

Aus der für die $X_n(x)$ geltenden Differentialgleichung

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} + \lambda_n X_n - \lambda_n C_n = 0, \qquad \lambda_n = n^2\pi^2 \tag{10.}$$

ergibt sich ihre Integrodifferentialgleichung

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} + \lambda_n\left(X_n - \int_0^1 X_n\,dx\right) = 0. \tag{11.}$$

Durch *Green*sche Kombination mit der Gleichung für eine andere Eigenfunktion X_m findet man die Eigenschaft der Biorthogonalität

$$\int_0^1 X_m\left[X_n - \int_0^1 X_n\,dx\right]dx = 0, \qquad m \neq n. \tag{12.}$$

Die zu $X_n(x)$ adjungierte Funktion ist also

$$\overline{X}_n(x) = X_n(x) - \int_0^1 X_n(x)\,dx = -\,C_n \cos n\pi x. \tag{13.}$$

Eine *Green*sche Funktion $G(x,y)$ sei durch die Gleichungen

$$\frac{d^2G(x,y)}{dx^2} - 1 = 0, \tag{14.}$$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|^{x=0} = \left.\frac{dG}{dx}\right|^{x=1} = 0, \quad \left.\frac{dG}{dx}\right|_{y+0}^{y-0} = +1 \tag{15.}$$

definiert; dann folgt aus (11.), (14.), (15.)

$$X_n(y) = \lambda_n \int_0^1 X_n\left[G(x,y) - \int_0^1 G(x,y)\,dx\right]dx + \int_0^1 X_n\,dx. \tag{16.}$$

Die *Green*sche Funktion

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{2} - y + \tfrac{1}{3}, \quad x < y, \\ G(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{2} - x + \tfrac{1}{3}, \quad x > y \end{aligned} \tag{17.}$$

hat die Eigenschaft

$$\int_0^1 G(x,y)\,dx = 0,$$

also wird (16.)

$$X_n(y) = \lambda_n \int_0^1 X_n(x)\,G(x,y)\,dx + \int_0^1 X_n(x)\,dx. \tag{18.}$$

Um hieraus eine homogene Integralgleichung zu gewinnen, suchen wir eine vom Index n unabhängige Funktion $\varphi(x)$ so zu bestimmen, daß

$$\int_0^1 X_n(x)\,dx = \lambda_n \int_0^1 X_n(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{19.}$$

ist*). Es folgt

*) Für diesen Hinweis bin ich Herrn Geheimrat *Kneser*, von dem ich die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt, zu Dank verpflichtet.

$$\frac{1}{n^2\pi^2} = \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \int_0^1 \varphi(x)\cos n\pi x\,dx,$$

und, wenn man sich $\varphi(x)$ in eine Kosinusreihe

$$\varphi(x) = \Sigma a_\nu \cos \nu\pi x$$

entwickelt denkt,

$$\frac{1}{n^2\pi^2} = a_0 - \frac{1}{2}a_n, \quad a_n = 2\left(a_0 - \frac{1}{n^2\pi^2}\right).$$

Der Konvergenz der Reihe wegen setzen wir die willkürliche Konstante a_0 gleich Null, dann wird

$$(20.) \qquad \varphi(x) = -2\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\cos \nu\pi x}{\nu^2\pi^2} = -\tfrac{1}{3} + x - \frac{x^2}{2},$$

wenn wir die Summation nach der Formel bei *Kneser*, a. a. O., § 4 (5), ausführen. Nun wird aus (18.) die homogene Integralgleichung gewonnen

$$(21.) \qquad X_n(y) = \lambda_n \int_0^1 X_n(x)\,K(x,y)\,dx,$$

wenn

$$G(x,y) + \varphi(x) = K(x,y),$$

also

$$(22.) \qquad \begin{aligned} K(x,y) &= x - y + \frac{y^2}{2}, \qquad x < y, \\ K(x,y) &= \qquad\quad \frac{y^2}{2}, \qquad x > y \end{aligned}$$

ist. Wir stellen die Eigenschaften des unsymmetrischen Kernes $K(x,y)$ zusammen:

$$(23.) \quad \frac{d^2K(x,y)}{dx^2} = 0, \quad \left.\frac{dK(x,y)}{dx}\right|^{x=0} = 1, \quad \left.\frac{dK(x,y)}{dx}\right|^{x=1} = 0, \quad \left.\frac{dK(x,y)}{dx}\right|_{x=y+0}^{x=y-0} = 1,$$

$$\int_0^1 K(x,y)\,dx = 0, \qquad K(x,0) = 0, \quad \left.\frac{dK(x,y)}{dx}\right|_{y=x+0}^{y=x-0} = -1,$$

$$(24.) \quad \frac{d^2K(x,y)}{dy^2} = 1, \quad \left.\frac{dK(x,y)}{dy}\right|_{x=y+0}^{x=y-0} = -1, \quad \left.\frac{dK(x,y)}{dy}\right|^{y=0} = \left.\frac{dK(x,y)}{dy}\right|^{y=1} = 0,$$

$$\int_0^1 K(x,y)\,dy = \varphi(x),$$

$$(25.) \quad \frac{d^2K(y,x)}{dx^2} = 1, \quad \left.\frac{dK(y,x)}{dx}\right|_{x=y+0}^{x=y-0} = +1, \quad \left.\frac{dK(y,x)}{dx}\right|^{x=0} = \left.\frac{dK(y,x)}{dx}\right|^{x=1} = 0.$$

Aus (25.) und der Differentialgleichung der zu X_n adjungierten Funktion (13.) folgt wegen

$$\int_0^1 \overline{X}_n\,dx = 0$$

die transponierte Integralgleichung

$$\overline{X}_n(y) = \lambda_n \int_0^1 \overline{X}_n(x)\, K(y,x)\, dx. \tag{26.}$$

Für die quellenmäßige Funktion nach der Bezeichnung von *Kneser* (Integralgleichungen, § 2) sind zwei Ansätze möglich; der erste lautet:

$$F(y) = \int_0^1 K(x,y) f(x)\, dx. \tag{27.}$$

Es ist

$$\frac{dF(y)}{dy} = \int_0^1 \frac{dK(x,y)}{dy} f(x)\, dx,$$

$$\frac{d^2F(y)}{dy^2} = \frac{d}{dy}\int_0^y \frac{dK(x,y)}{dy} f(x)\, dx + \frac{d}{dy}\int_y^1 \frac{dK(x,y)}{dy} f(x)\, dx$$

$$= \frac{dK(x,y)}{dy} f(x)\Big|_{x=y-0}^{x=y+0} + \int_0^1 \frac{d^2K(x,y)}{dy^2} f(x)\, dx = -f(y) + \int_0^1 f(x)\, dx;$$

setzt man also

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

voraus, so ist die Differentialgleichung der quellenmäßigen Funktion

$$\frac{d^2F(y)}{dy^2} = -f(y). \tag{28.}$$

Die quellenmäßige Funktion erfüllt die Randbedingungen

$$F(0) = \frac{dF(y)}{dy}\Big|^{y=0} = \frac{dF(y)}{dy}\Big|^{y=1} = 0. \tag{29.}$$

Umgekehrt ergibt sich durch Kombination der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2K(x,y)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -f(x),$$

daß jede Funktion $\Phi(y)$, die selbst stetig ist, eine stetige erste und eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt und die Randbedingungen

$$\Phi(0) = \frac{d\Phi(y)}{dy}\Big|^0 = \frac{d\Phi(y)}{dy}\Big|^1 = 0$$

erfüllt, quellenmäßig darstellbar ist:

$$\Phi(y) = \int_0^1 K(x,y) f(x)\, dx.$$

Der zweite Ansatz für die quellenmäßige Funktion lautet

$$G(x) = \int_0^1 K(x,y) g(y)\, dy; \tag{30.}$$

durch zweimalige Differentiation findet man ihre Differentialgleichung

$$\frac{d^2G(x)}{dx^2} = -g(x). \tag{31.}$$

Führt man die Bedingung

$$\int_0^1 g(y)\,dy = 0$$

ein, so erfüllt die Funktion (30.) die Randbedingungen

$$\frac{dG(x)}{dx}\bigg|^{x=0} = \frac{dG(x)}{dx}\bigg|^{x=1} = 0. \tag{32.}$$

Jede Funktion $\Psi(x)$, die selbst stetig ist, eine stetige erste und eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt, ferner den Randbedingungen

$$\frac{d\Psi}{dx}\bigg|^{0} = \frac{d\Psi}{dx}\bigg|^{1} = 0$$

und der Beziehung

$$\int_0^1 \Psi(\alpha)\,d\alpha = 0$$

genügt, ist quellenmäßig darstellbar, wie sich wiederum durch Kombination der Gleichungen

$$\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} = -g(y), \qquad \frac{d^2K(x,y)}{dy^2} = 1$$

ergibt.

Es soll jetzt der lösende Kern $\Gamma(x, y)$, der den Gleichungen*)

$$\Gamma(x,y) = K(x,y) + \lambda\int_0^1 K(x,\alpha)\,\Gamma(\alpha,y)\,d\alpha,$$

$$\Gamma(x,y) = K(x,y) + \lambda\int_0^1 K(\alpha,y)\,\Gamma(x,\alpha)\,d\alpha \tag{33.}$$

genügt, bestimmt werden. Die Differentialgleichungen und Randbedingungen, die er erfüllt, gewinnen wir auf dieselbe Weise wie die entsprechenden Eigenschaften der quellenmäßigen Funktion. Wir finden dann als Eigenschaften von $\Gamma(x, y)$ in bezug auf x

$$\frac{d^2\Gamma(x,y)}{dx^2} + \lambda\Gamma(x,y) = 0, \qquad \int_0^1 \Gamma(x,y)\,dx = 0,$$

$$\frac{d\Gamma(x,y)}{dx}\bigg|^{x=0} = 1, \qquad \frac{d\Gamma(x,y)}{dx}\bigg|^{x=1} = 0, \qquad \frac{d\Gamma(x,y)}{dx}\bigg|_{x=y+0}^{x=y-0} = +1; \tag{34.}$$

in bezug auf y

$$\frac{d^2\Gamma(x,y)}{dy^2} + \lambda\Gamma(x,y) = 1 + \lambda\int_0^1 \Gamma(x,y)\,dy, \tag{35.}$$

$$\int_0^1 \Gamma(x,y)\,dy \neq 0, \qquad \frac{d\Gamma(x,y)}{dy}\bigg|^{y=0} = \frac{d\Gamma(x,y)}{dy}\bigg|^{y=1} = 0, \qquad \frac{d\Gamma(x,y)}{dy}\bigg|_{x=y+0}^{x=y-0} = -1.$$

*) Vgl. z. B. *Kneser*, Integralgleichungen § 49.

Zur Bestimmung von Γ genügen die Gleichungen (34.). Setzt man an:

$$\Gamma(x, y) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + a \cos \sqrt{\lambda} x, \quad x < y,$$

$$\Gamma(x, y) = b \cos \sqrt{\lambda} (1 - x), \qquad x > y$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten a und b, so ergibt sich aus der Stetigkeit der Resolvente und der Unstetigkeit ihrer Ableitung an der Stelle $x = y$

$$a = \frac{\cos \sqrt{\lambda} - \cos \sqrt{\lambda}(1-y)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \quad b = \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} y}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}},$$

mithin

$$\Gamma(x, y) = \frac{\cos \sqrt{\lambda}(1-x) - \cos \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda}(1-y)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \qquad x < y,$$

(36.)

$$\Gamma(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} y}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}(1-x), \qquad x > y.$$

An den Ausdrücken (36.) sind die Eigenschaften (35.) leicht zu bestätigen. Man hat

$$\lim_{\lambda = 0} \Gamma(x, y) = K(x, y) \tag{37.}$$

im ganzen Grundgebiete.

Um die Partialbruchzerlegung der Resolvente zu finden, fassen wir sie als Funktion der komplexen Variablen

$$\sqrt{\lambda} = z$$

auf und wenden die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{\Gamma(u)\, du}{u - z} = \Sigma \operatorname{Res} \frac{\Gamma(u)}{u - z}$$

an, in der links über eine die Stelle z umfassende Kontur $\mathfrak{C}$ zu integrieren ist und rechts die Residuen aller im Innern der Kurve $\mathfrak{C}$ liegenden Pole der links integrierten Funktion stehen; diese Pole sind die Stellen $u = n\pi$ und $u = z$. Nun ist

$$\operatorname{Res}_{u=z} \frac{\Gamma(u)}{u - z} = \Gamma(z),$$

$$\operatorname{Res}_{u=n\pi} \frac{\Gamma(u)}{u - z} = \frac{\cos n\pi x (1 - \cos n\pi y)}{n\pi (n\pi - z)},$$

mithin ergibt sich

$$\Gamma(x, y) + 2 \sum_{n} \frac{\cos n\pi x (1 - \cos n\pi y)}{n^2 \pi^2 - z^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{\Gamma(u)}{u - z} du. \tag{38.}$$

Wählt man als Integrationskontur ein Rechteck mit Parallelen zu den Achsen als Seiten, von denen nur die vertikalen nicht durch die

Pole unserer Funktion hindurchgehen dürfen, so ist leicht zu zeigen, daß bei wachsender Kontur das Integral in (38.) beliebig klein wird. Indem wir zunächst

(39.) $$x < y$$

voraussetzen, finden wir

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{\Gamma(u)}{u-z}\,du = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos u(1-x)}{\sin u}\,\frac{du}{u^2-z^2} - \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos u(x+y-1)}{\sin u}\,\frac{du}{u^2-z^2} - \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos u(x-y+1)}{\sin u}\,\frac{du}{u^2-z^2}$$
$$+ 2\int_{u_2}^{u_3} \frac{\cos u(1-x)}{\sin u}\,\frac{du}{u^2-z^2} - \int_{u_2}^{u_3} \frac{\cos u(x+y-1)}{\sin u}\,\frac{du}{u^2-z^2} - \int_{u_2}^{u_3} \frac{\cos u(x-y+1)}{\sin u}\,\frac{du}{u^2-z^2},$$

wenn u_1, u_2, u_3 drei aufeinanderfolgende Rechtecksecken bezeichnen. Daß die Integrale längs der horizontalen Rechtecksseite beliebig klein werden, ergibt sich sofort, für das dritte folgt es mit Benutzung von (39.); für die vertikale Seite, auf der wir

$$u = p + i\eta$$

setzen können, wo p konstant ist, sei der Beweis angedeutet. Es findet sich

$$|\cos u(1-x)| \leqq \mathfrak{Cof}\,\eta(1-x) \leqq \mathfrak{Cof}\,\eta, \quad |\sin u| \geqq \mathfrak{Sin}\,\eta, \quad \left|\frac{\cos u(1-x)}{\sin u}\right| \leqq \mathfrak{Ctg}\,\eta.$$

Nun wird zwar $\mathfrak{Ctg}\,\eta$ für $\eta = 0$ unendlich groß, aber in der Nähe dieser Stelle ist $\left|\frac{\cos u(1-x)}{\sin u}\right|$ von $\left|\frac{\cos p(1-x)}{\sin p}\right|$ beliebig wenig verschieden, einer endlichen Größe, da eigens

$$p \neq k\pi, \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

angenommen wurde. Für die von $\eta = 0$ verschiedenen Stellen liefert die Ungleichung eine obere Schranke für $\left|\frac{\cos u(1-x)}{\sin u}\right|$: dieser absolute Betrag liegt mithin auf der ganzen vertikalen Seite unter einer festen endlichen Grenze, woraus dann sofort folgt, daß das Integral $\int_{u_2}^{u_3} \frac{\cos u(1-x)}{\sin u}\,\frac{du}{u^2-z^2}$ klein wird. Dasselbe ergibt sich für die andern Integrale.

Ganz ebenso gestaltet sich der Nachweis für $x > y$, so daß jetzt die Zerlegung der Resolvente im ganzen Grundgebiete hergestellt ist,

(40.) $$\Gamma(x,y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{-\sqrt{2}\cos n\pi x \cdot \sqrt{2}\,(1-\cos n\pi y)}{n^2\pi^2 - \lambda}.$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich die bilineare Formel

(41.) $$K(x,y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{-\sqrt{2}\cos n\pi x \cdot \sqrt{2}\,(1-\cos n\pi y)}{n^2\pi^2} = \sum_n^{1,\infty} \frac{\overline{X}_n(x)\,X_n(y)}{\lambda_n},$$

und zwar auch in der Form, wie man sie auf Grund des heuristischen Ansatzes

$$K(x,y) = \Sigma a_n \bar{X}_n(x)$$

erwartet. Die Funktionen sind dabei so normiert, daß

$$\int_0^1 X_n \bar{X}_n \, dx = 1 \tag{42.}$$

ist, wobei sich $C_n = \sqrt{2}$ findet. Die Richtigkeit der differenzierten bilinearen Formel

$$\begin{aligned} K'(x,y) = 1 &= \sum_n^{1,\infty} \frac{\sqrt{2}\sin n\pi x \cdot \sqrt{2}\,(1-\cos n\pi y)}{n\pi}, \qquad x < y, \\ K'(x,y) = 0 &= \sum_n^{1,\infty} \frac{\sqrt{2}\sin n\pi x \cdot \sqrt{2}\,(1-\cos n\pi y)}{n\pi}, \qquad x > y \end{aligned} \tag{43.}$$

läßt sich sofort mit Hülfe der Formeln für $\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ nachweisen.

Hieraus folgt die Möglichkeit der Darstellung willkürlicher Funktionen, und zwar auch für Funktionen, die mit ihren beiden ersten Ableitungen stückweise stetig sind, weil der Kern und seine Ableitung in der gewünschten Weise entwickelt sind, und der Kern eine unstetige Ableitung hat, seine Ableitung aber selbst eine unstetige Funktion ist*).

*) Vgl. *Kneser*, Integralgleichungen § 5.

Über die Existenz einer *Jordan*schen Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ bei vorgeschriebenem $\varphi(t)$.

Von Herrn *Julius Pál* in Székelyudvarhely.

Herr Prof. *Fejér*-Budapest hatte die Freundlichkeit meine Aufmerksamkeit auf folgendes, mit seiner in den Pariser Comptes Rendus zuletzt erschienenen Note*) zusammenhängendes Problem zu lenken:

Gegeben sei eine für alle Werte von t definierte stetige, nach 2π periodische Funktion $\varphi(t)$. Gibt es dann eine „Ergänzungsfunktion" $\psi(t)$ derart, daß die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine (geschlossene) Jordansche Kurve mit der Umlaufszeit 2π darstellen?

Unter I. werde ich durch Anführung eines einfachen Beispiels zeigen, daß dem nicht immer so ist. Unter II. gebe ich, indem ich einen passenden Hülfsbegriff einführe, die der Funktion $\varphi(t)$ aufzuerlegende, durchsichtige Bedingung an, die *notwendig* ist für die Existenz einer Ergänzungsfunktion. Unter III. zeige ich, daß diese Bedingung auch *hinreichend* ist.

I.

Es sei $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = 0$ und $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. In jedem der Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ sei $\varphi(t)$ eine lineare Funktion. *Zu diesem $\varphi(t)$ gibt es keine Ergänzungsfunktion.* Es sei nämlich $\psi(t)$ *irgendeine* stetige Funktion in $(0, 2\pi)$. Dann ist die Linie

*) *L. Fejér:* La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple; C. R. de l'Acad. des sciences, Paris, t. 156 (1913), pg. 46.

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ entweder nicht geschlossen oder sie weist mehrfache Punkte auf, ist also keine *Jordan*sche.

Beweis: Den angeführten vier Intervallen mögen auf der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Stücke AB, BC, CD, DE entsprechen. Die Punkte A, C, E liegen auf der Geraden $x = 0$, die Punkte B und D auf der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$.

Fällt E nicht auf A, so ist die Kurve nicht geschlossen, fällt A auf C oder B auf D, so ist A resp. B ein mehrfacher Punkt. Um also nicht im voraus die Möglichkeit einer *Jordan*schen Kurve zu verschließen, setze ich voraus, daß E auf A, dagegen C nicht auf A und D nicht auf B fällt; und dann ist es gewiß keine Einschränkung der Allgemeinheit weiter vorauszusetzen, daß C *über* A liegt.

Jedes der Kurvenstücke AB, BC, CD, DA ist (da $\varphi(t)$ in den betreffenden Intervallen monoton verläuft) einer Darstellung von der Form $y = f(x)$ fähig und daher können wir in üblicher Weise davon sprechen, daß ein Punkt P des Streifens $\left(x = 0, x = \frac{\pi}{2}\right)$ über, auf oder unter einem dieser Kurvenstücke liegt.

Liegt D *über* B, so werden sich BC und AD schneiden, da A unter BC, D aber über BC liegt. Liegt D *unter* B, so werden sich AB und CD schneiden, da C über AB, D aber unter AB liegt.

Findet aber einer dieser Schnitte statt, so ist die Kurve wiederum keine *Jordan*sche mehr.

II.

Um jetzt die angekündigte notwendige Bedingung formulieren zu können, führe ich einen einfachen Begriff, den Begriff „Brückenintervall“ ein.

Im Bereiche $a \leqq t \leqq b$ sei eine stetige Funktion $f(t)$ definiert, deren Minimum resp. Maximum m resp. M heißen soll. *Dann heiße* (α, β) *ein Brückenintervall von* $f(t)$, *wenn* $f(\alpha) = m$ *und* $f(\beta) = M$ *(oder* $f(\alpha) = M$ *und* $f(\beta) = m$*) ist, und wenn innerhalb des Intervalls* (α, β) *der Wert* $[M - f(t)]\,[f(t) - m]$ *stets von Null verschieden ist.*

Man sieht unmittelbar, daß, wenn $f(\alpha') = m$ und $f(\beta') = M$ ist, das Intervall (α', β') zumindest ein Brückenintervall enthält. Es sei z. B. $\alpha' < \beta'$. Dann nehme man die Wurzeln der Gleichung $f(t) = m$, die auf

das Intervall (α', β') fallen. Die größte unter diesen sei α. Hierauf nehme man die Wurzeln der Gleichung $f(t) = M$, die auf das Intervall (α, β') fallen. Die kleinste unter diesen sei β. Dann ist (α, β) ein Brückenintervall.

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zu unserer für alle t definierten stetigen, nach 2π periodischen Funktion $\varphi(t)$ zurück.

Ein beliebiges Intervall $(\xi, \xi + 2\pi)$ wird zumindest ein Brückenintervall von $\varphi(t)$ enthalten. Es gibt aber auch Intervalle $(\xi, \xi + 2\pi)$, die mehr als ein Brückenintervall fassen. Ist nämlich (α, β) ein Brückenintervall, so wird auch das Intervall $(\beta, \alpha + 2\pi)$ zumindest *ein* solches enthalten.

Damit nun zu $\varphi(t)$ eine Ergänzungsfunktion existiert, ist notwendig, daß kein Intervall $(\xi, \xi + 2\pi)$ mehr als zwei Brückenintervalle enthält.

In Anlehnung an die Terminologie der elliptischen Funktionen kann man diese Bedingung auch dahin formulieren, es sei für die Existenz einer Ergänzungsfunktion notwendig, daß nur zwei „voneinander unabhängige" Brückenintervalle existieren.

Beim Beweise dieses Satzes stützen wir uns auf elementare Sätze aus der Analysis situs *Jordan*scher Kurven.

Es sei $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine *Jordan*sche Linie; Minimum und Maximum von $\varphi(t)$ sollen m und M heißen; ferner sei (α, β) ein Brückenintervall von $\varphi(t)$. Das Stück der Kurve, das in der Zeit (α, β) beschrieben wird, ist eine nicht geschlossene Linie ohne mehrfache Punkte, die ganz innerhalb des Streifens $(x = m, x = M)$ verläuft und nur mit den Endpunkten A $(t = \alpha)$ und B $(t = \beta)$ an die Grenzgeraden des Streifens stößt. Eine solche Linie soll eine „Brücke" heißen. Die Brücke (AB) teilt den Streifen $(x = m, x = M)$ in zwei Kontinua; das eine liegt über, das andere unter der Brücke*).

Variiert t von β bis $\alpha + 2\pi$, so wird der ergänzende Bogen der Brücke (AB) beschrieben. *Dieser liegt* — von den Endpunkten abgesehen — *ganz über oder ganz unter der Brücke* (AB). Es seien nämlich P und Q zwei Punkte des in der Zeit $(\beta, \alpha + 2\pi)$ beschriebenen Ergänzungsbogens. Läge P über, Q unter der Brücke (AB), so wäre ein Punkt des Bogens PQ *auf* der Brücke und die Kurve wäre keine *Jordan*sche.

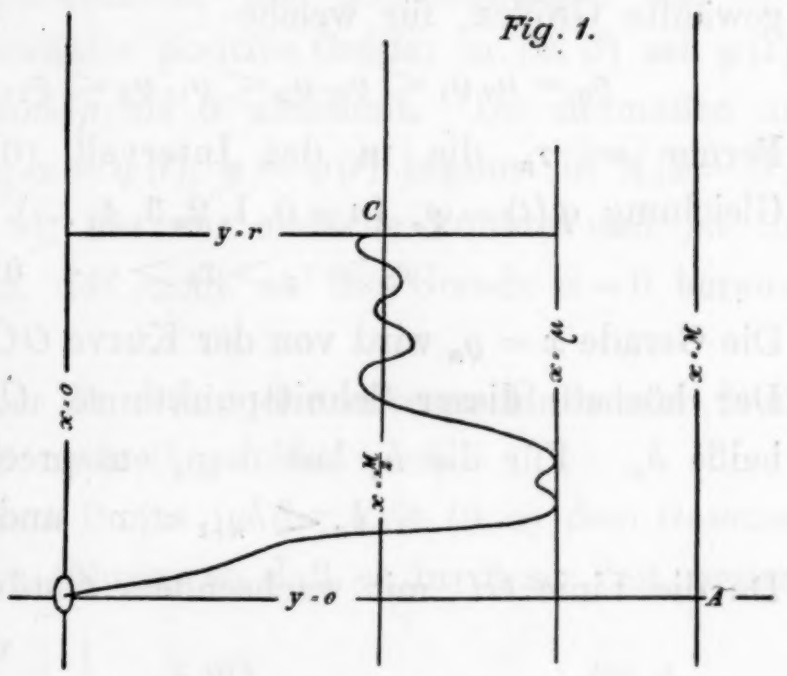
*) Auch von den Grenzpunkten des oberen (unteren) Kontinuums, die nicht auf der Brücke (AB) liegen, werden wir sagen, daß sie über (unter) der Brücke liegen.

Gäbe es aber auf der vollen Kurve *drei* Brücken, so gäbe es unter ihnen eine höchste, eine mittlere und eine tiefste; der Ergänzungsbogen der mittleren läge zum Teil über, zum Teil unter derselben, was laut dem soeben Ausgeführten nicht möglich.

III.

Es erübrigt noch zu zeigen, daß die angegebene Bedingung eine hinreichende ist, d. h. daß eine Ergänzungsfunktion zu $\varphi(t)$ existiert, so oft diese nur zwei unabhängige Brückenintervalle besitzt.

Fig. 1.



Ich mache bei diesem Beweise einige Voraussetzungen, die die Allgemeinheit gewiß nicht einschränken, und zwar setze ich voraus, daß das Minimum von $\varphi(t)$ gleich Null ist, (das Maximum heiße wie zuvor M); ferner, daß $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\alpha) = M$ und $(0, \alpha)$ ein Brückenintervall ist. Das Intervall $(\alpha, 2\pi)$ enthält jetzt laut Voraussetzung *nur ein* Brückenintervall, dieses sei (β, γ). Für die gegenseitige Lage der zwei Brückenintervalle sind folgende vier Fälle möglich: 1. $\alpha = \beta, \gamma = 2\pi$; 2. $\alpha < \beta, \gamma = 2\pi$; 3. $\alpha = \beta, \gamma < 2\pi$; 4. $\alpha < \beta, \gamma < 2\pi$. Die Behandlung der vier Fälle bietet keine wesentlichen Verschiedenheiten.

Fall 1. Es soll $\psi(t)$ zunächst für $0 \leqq t \leqq \alpha$ konstruiert werden; dies geschehe wie folgt: Man nehme die Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = \frac{M}{2}$, die in das Intervall $(0, \alpha)$ fallen; die größte unter diesen sei r. Hierauf sei $\psi(t) = t$ für $0 \leqq t \leqq r$.

In der Zeit $(0, r)$ wird ein Punkt, der laut dem Gesetz $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t) = t$ bewegt wird, ein Kurvenstück OC der oberen Halbebene beschreiben, das nur einfache Punkte besitzt (siehe Fig. 1). Jetzt soll ein Punkt in der Zeit (r, α) von C nach $A(x = M, y = 0)$ so geführt werden, daß er in der Zeit (r, α) weder sich selbst, noch der Linie OC begegnet und seine Abszisse dem Gesetze $x = \varphi(t)$ gemäß sich ändert. —

Das Maximum von $\varphi(t)$ für $0 \leqq t \leqq r$ sei μ. Es ist $\frac{M}{2} \leqq \mu < M$; mit $\mu < M$ wird ausgenutzt, daß $(0, \alpha)$ ein Brückenintervall ist. Ist $\mu = \frac{M}{2}$, so kann $\psi(t)$ für (r, α) sofort definiert werden, als eine monoton abnehmende, sonst beliebige Funktion, die in r resp. α die Werte r resp. 0 annimmt. Nicht so einfach gestaltet sich die Konstruktion von $\varphi(t)$ für (r, α), wenn $\mu > \frac{M}{2}$ (wie in Fig. 1.).

In diesem Falle verfahre man so: Es seien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ beliebig gewählte Größen, für welche

$$\varrho_0 = \mu,\ \varrho_1 < \varrho_0,\ \varrho_2 < \varrho_1,\ \varrho_3 < \varrho_2, \ldots \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \varrho_n = \frac{M}{2}.$$

Ferner sei r_n die in das Intervall $(0, \alpha)$ fallende größte Wurzel der Gleichung $\varphi(t) = \varrho_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$. Dann hat man unmittelbar:

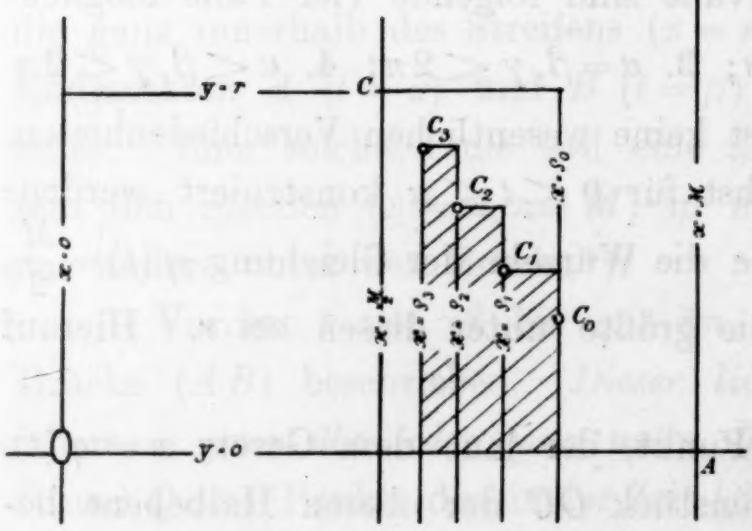
$$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} r_n = r.$$

Die Gerade $x = \varrho_n$ wird von der Kurve OC in mehreren Punkten geschnitten. Der höchste dieser Schnittpunkte sei C_n, seine Höhe über der X-Achse heiße h_n. Für die h_n hat man, entsprechend den obigen Ungleichungen,

$$h_n < h_{n+1} < r \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} h_n = r.$$

Da die Linie OC mit wachsendem t ständig steigt, so ist für alle Punkte von OC, welche die Ungleichung $\varphi(t) \geqq \varrho_n$ erfüllen, $\psi(t) \leqq h_n$. Daher bilden $C_1, C_2, C_3, \ldots$ die Ecken einer Stufenleiter (siehe Fig. 2) von der Eigenschaft, daß OC ganz *unterhalb* dieser Stufenleiter verläuft.

Fig. 2.



Die Kollision mit OC wird also bestimmt vermieden, wenn jener bewegte Punkt, der von C nach A geführt werden soll, *über* der Stufenleiter geleitet wird. Dafür, daß die Linie AC sich selbst nicht schneidet, soll damit vorgesorgt werden, daß $\psi(t)$ in der Zeit (r, α) monoton abnehme.

Beides wird erreicht durch folgende Definition von $\psi(t)$: Es sei $\psi(r_n) = h_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, ferner sei $\psi(r) = r$, $\psi(\alpha) = 0$; in den

Intervallen (r_{n+1}, r_n) wie auch im Intervall (r_0, α) soll $\psi(t)$ linear abnehmen.

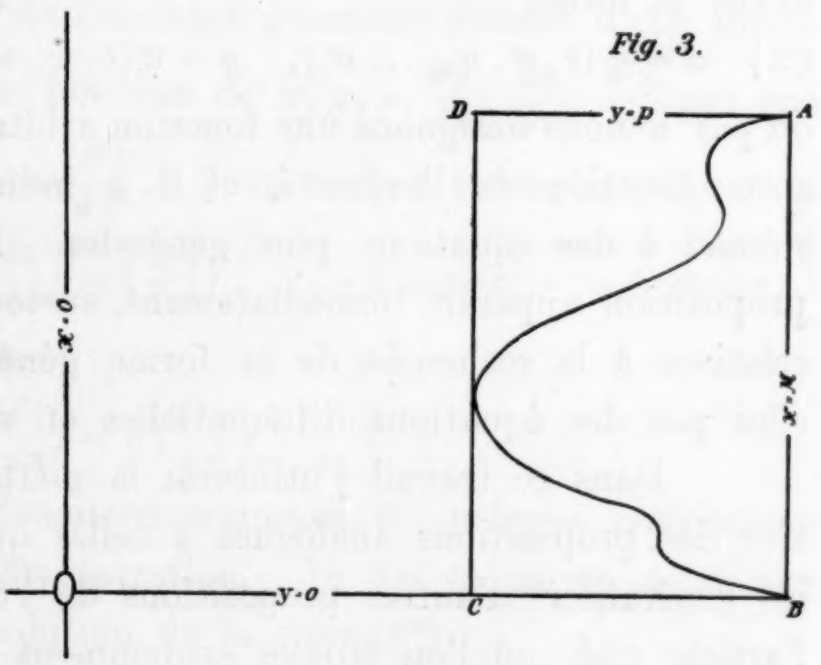
Indem wir so $\psi(t)$ für $0 \leqq t \leqq \alpha$ definierten, führten wir einen Punkt in der Zeit $(0, \alpha)$ von O nach A, und zwar in der oberen Halbebene. Bei dieser Bewegung war $x = \varphi(t)$, und die Bahnkurve hatte nur einfache Punkte. In derselben Weise werden wir in der Zeit $(\alpha, 2\pi)$ den Punkt von A nach O in der unteren Halbebene zurückleiten können, womit Fall 1 erledigt ist.

Fall 2 *und* 3. Diese Fälle lassen sich durch eine lineare Transformation von t aufeinander zurückführen, und so besprechen wir nur Fall 2. Es sei p eine beliebig gewählte positive Größe; in (α, β) sei $\psi(t)$ eine lineare Funktion, die dort von p bis 0 abnimmt. Die dermaßen in der Zeit (α, β) beschriebene Linie $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ beginnt in $A(x = M, y = p)$, endigt in $B(x = M, y = 0)$, hat nur einfache Punkte und ist in ein Viereck $ABCD$ eingeschlossen, das nicht an die Gerade $x = 0$ heranreicht. (Siehe Fig. 3.).

In der Zeit $(\beta, 2\pi)$ soll der Punkt in der unteren Halbebene laut dem Verfahren von Fall 1 von B nach O geführt werden.

Es ist also noch nötig, einen Punkt in der Zeit $(0, \alpha)$ dem Gesetze $\alpha = \varphi(t)$ gemäß von O nach A zu führen, so daß er in dieser Zeit weder sich selbst, noch die Linie AB treffen soll. Dieses geschieht genau so, wie die Konstruktion von AC in Fall 1. Es wird mit dem Bau einer von O nach A führenden Stufenleiter begonnen, welche die Linie AB *unter* sich läßt und *über* dieser wird dann der bewegte Punkt von O nach A geführt.

Fig. 3.



Fall 4. Es braucht kaum gesagt zu werden, daß die zweifache, einmal in der oberen, einmal in der unteren Halbebene erfolgte Ausführung, der Konstruktion, die in Fall 2 den Punkt von O nach B führte, den Fall 4 erledigt.

Auch zeigen die obigen Ausführungen, daß zu $\varphi(t)$ entweder gar keine oder unendlich viele Ergänzungsfunktionen konstruiert werden können

Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles.

Par M. *P. Zervos* à Athènes.

Introduction.

Dans un paragraphe de son article *Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen* (Festschrift *Heinrich Weber*, 5. März 1912) M. *David Hilbert* a démontré qu'il n'existe aucune solution pour l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{1.}$$

ayant la forme

$$x = \varphi(t, w, w_1, \dots w_r), \quad y = \psi(t, w, w_1, \dots w_r), \quad z = \chi(t, w, w_1, \dots w_r) \tag{2.}$$

où par w nous désignons une fonction arbitraire de t et par w_i la dérivée de cette fonction de l'ordre i, et il a indiqué comment cette proposition s'étend à des équations plus générales. La grande importance de cette proposition apparaît immédiatement, surtout lorsqu'on étudie des questions relatives à la recherche de la forme générale de n fonctions liées entre elles par des équations différentielles en nombre inférieure à n.

Dans ce travail j'utiliserai la méthode de M. *Hilbert* pour démontrer des propositions analogues à celles qui précèdent. Je tâcherai aussi de généraliser d'autres propositions de l'éminent géomètre énoncées dans l'article cité, où l'on trouve évidemment des équations qui se ramènent par l'introduction de variables auxiliaires à des systèmes de la forme

$$f_i(x_1, x_2, \dots x_{n+1}, dx_1, dx_2, \dots dx_{n+1}) = 0, \qquad i < n-1 \tag{3.}$$

les f_i étant des fonctions homogènes par rapport à $dx_1, dx_2, \dots dx_{n+1}$. Si l'on suppose $i = n-1$, nous nous trouvons devant un cas qui a été

étudié par M. *Goursat* dans un beau mémoire (*Sur le problème de Monge*, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 33, 1905). M. *Goursat* a donné une méthode élégante relative à l'intégration du système

$$f_i(x_1, \dots x_{n+1}, dx_1, \dots dx_{n+1}) = 0. \qquad (i=1, \dots n-1)$$

J'ai étudié cette méthode dans une note insérée dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (25 mai 1908).

Dans le deuxième chapitre du présent travail je poursuis cette étude en me proposant de généraliser les résultats que j'ai alors obtenus.

I. Théories de M. *Hilbert*.

1. — Pour l'équation de la forme

$$F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Monge, comme on le sait, a donné l'expression des systèmes les plus généraux de fonctions vérifiant cette équation à l'aide d'une fonction arbitraire, et cela sans aucun signe de quadrature.

2. — On peut donc dire que pour l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \qquad (1.)$$

M. *Hilbert* a démontré qu'une intégration analogue à celle de *Monge* n'est pas possible*). L'analyse de l'éminent géomètre s'étend d'elle même à toute équation donnant $\frac{dz}{dx}$ en fonction de $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ par une expression non homographique en $\frac{d^2y}{dx^2}$. Prenons par exemple, l'équation

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^\mu = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\nu, \quad \mu > 0 \text{ entier}, \quad \nu > 0 \text{ entier} \qquad (4.)$$

ou, plus généralement, l'équation

$$\sigma\left(\frac{dz}{dx}\right) = F\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \qquad (5.)$$

où les σ et F expriment des fonctions soumises à quelques restrictions évidentes dans la suite de la démonstration. Je dis qu'on ne peut pas avoir pour cette équation une solution de la forme**)

---

*) Relativement à l'impossibilité de l'extension de la méthode de *Monge* à une équation du premier ordre à 4 variables j'ai déjà fait quelques remarques dans deux notes insérées dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. (10 avril, 11 septembre 1905.)

**) Voir ci-dessus, N° 1.

(2.) $x = \varphi(t, w, w_1, \dots w_r), \quad y = \psi(t, w, w_1, \dots w_r), \quad z = \chi(t, w, w_1, \dots w_r).$

En effet, posons avec M. *Hilbert*

$$(6.) \qquad \mu = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi_t + w_1 \cdot \psi_w + \dots + w_{r+1}\psi_{w_r}}{\varphi_t + w_1 \cdot \varphi_w + \dots + w_{r+1}\varphi_{w_r}} = \frac{\psi'}{\varphi'}.$$

S'il existait une telle solution, on devrait avoir l'identité

$$(7.) \qquad \sigma\Big(\frac{\chi_t + w_1\,\chi_w + \dots + w_{r+1}\,\chi_{w_r}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \dots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}\Big) \equiv F\Big(\frac{\mu_t + w_1\,\mu_w + \dots + w_{r+1}\,\mu_{w_r} + w_{r+2}\,\mu_{w_{r+1}}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \dots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}\Big)$$

le premier membre ne contenant pas w_{r+2}; il en serait de même pour le second et on aurait

$$(8.) \qquad \mu_{w_{r+1}} = 0,$$

d'où en vertu de la relation (6.)

$$(9.) \qquad \mu = \frac{\psi_{w_r}}{\varphi_{w_r}}.$$

Supposons que les fonctions σ et F soient telles que pour avoir l'identité

$$(10.) \qquad \sigma\Big(\frac{a + bx}{\gamma + \delta x}\Big) = F\Big(\frac{A + Bx}{\gamma + \delta x}\Big)$$

par rapport à x, il faut que tous les deux membres σ et F soient indépendants de x. Alors pour avoir l'identité

$$(11.) \qquad \sigma\Big(\frac{\chi_t + w_1\,\chi_w + \dots + w_{r+1}\,\chi_{w_r}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \dots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}\Big) \equiv F\Big(\frac{\mu_t + w_1\,\mu_w + \dots + w_{r+1}\,\mu_{w_r}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \dots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}\Big)$$

par rapport à w_{r+1}, il faut que tous les deux membres soient indépendants de w_{r+1}; c'est-à-dire pour le cas général où nous supposons que nous nous trouvions il faut qu'on ait*)

$$(12.) \qquad \frac{x'}{\varphi'} = \frac{x_{w_r}}{\varphi_{w_r}}, \qquad (13.) \qquad \frac{\mu'}{\varphi'} = \frac{\mu_{w_r}}{\varphi_{w_r}}.$$

Une fois établies les relations (9.), (12.), (13.) nous pouvons déduire toutes les autres de la démonstration de M. *Hilbert* relative à l'équation $\frac{dz}{dx} = \Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big)^2$ et nous pouvons par conséquent démontrer de la même manière notre proposition.

3. — Je dis maintenant que la même proposition est vraie pour une équation de la forme

$$(14.) \qquad \sigma\Big(\frac{d^2z}{dx^2}\Big) = F\Big(\frac{d^3y}{dx^3}\Big)$$

---

*) Je me sers des mêmes notations que M. *Hilbert* dans l'article cité.

où les fonctions σ et F sont soumises à des restrictions analogues à celles du paragraphe qui précède.

Considérons d'abord l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2. \tag{15.}$$

Soit qu'il existe une solution de la forme (2.). Posons

$$\lambda = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{\psi_t + w_1\psi_w + \cdots + w_{r+1}\psi_{w_r}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}, \tag{16.}$$

$$\mu = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda'}{\varphi'} = \frac{\lambda_t + w_1\lambda_w + \cdots + w_{r+2}\lambda_{w_{r+1}}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}, \tag{17.}$$

$$\varrho = \frac{dz}{dx} = \frac{\chi'}{\varphi'} = \frac{\chi_t + w_1\chi_w + \cdots + w_{r+1}\chi_{w_r}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}, \tag{18.}$$

on aurait

$$\frac{\varrho_t + w_1\varrho_w + w_2\varrho_{w_1} + \cdots + w_{r+2}\varrho_{w_{r+1}}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + w_2\varphi_{w_1} + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}} = \left(\frac{\mu_t + w_1\mu_w + \cdots + w_{r+3}\mu_{w_{r+2}}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}\right)^2, \tag{19.}$$

et il faudrait que ce soit une identité par rapport à $t, w, w_1, \ldots w_{r+3}$. Or, le premier membre ne contient pas w_{r+3}; il arrive donc la même chose au second, et on a

$$\mu_{w_{r+2}} = 0 \tag{20.}$$

ou en vertu de (17.)

$$\lambda_{w_{r+1}} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \lambda = \frac{\psi_{w_r}}{\varphi_{w_r}} \tag{21.) (22.}$$

en tenant compte de la définition (16.) de λ. Si l'on considère maintenant les deux membres de l'identité (19.) on voit que le second sera quadratique par rapport à w_{r+2}, pendant que le premier membre est une fonction linéaire par rapport à w_{r+2}; il faut donc, pour que la relation (19.) soit une identité par rapport à w_{r+2}, que tous les deux membres soient indépendants de la quantité w_{r+2} ou, ce qui est la même chose, qu'on ait

$$\varrho_{w_{r+1}} = 0, \qquad \mu_{w_{r+1}} = 0 \tag{23.) (24.}$$

d'où en vertu des équations (17.), (18.), (21.) on a

$$\frac{\lambda'}{\varphi'} = \frac{\lambda_{w_r}}{\varphi_{w_r}}, \qquad \frac{\chi'}{\varphi'} = \frac{\chi_{w_r}}{\varphi_{w_r}}, \tag{25.) (26.}$$

et l'identité (19.) prend aussi la forme

$$\frac{\varrho_t + w_1\varrho_w + w_2\varrho_{w_1} + \cdots + w_{r+1}\varrho_{w_r}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + w_2\varphi_{w_1} + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}} = \left[\frac{\mu_t + w_1\mu_w + \cdots + w_{r+1}\mu_{w_r}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}\right]^2. \tag{27.}$$

Alors, si l'on observe que les $\varrho_t, \varrho_w, \varrho_{w_1}, \dots \varrho_{w_r}, \varphi_t, \varphi_w, \varphi_{w_1}, \dots \varphi_{w_r}, \mu_t, \mu_w, \dots \mu_{w_r}$ ne contiennent pas w_{r+1}, on a que chacune de ces deux fractions sera indépendante de w_{r+1} c'est-à-dire

$$(28.) \quad \frac{\varrho'}{\varphi'} = \frac{\varrho_{w_r}}{\varphi_{w_r}}, \qquad (29.) \quad \frac{\mu'}{\varphi'} = \frac{\mu_{w_r}}{\varphi_{w_r}}.$$

Résolvons l'équation $x = \varphi(t, w, w_1, \dots w_r)$ par rapport à x, et introduisons cette valeur dans les fonctions λ et ϱ, soit

$$(30.) \qquad \lambda(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, w_r) \equiv f(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, x),$$

$$(30'.) \qquad \varrho(t, w, w_1, \dots w_r) \equiv g(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, x).$$

Pour toute fonction k contenant outre les $t, w, w_1, \dots w_{r-1}$ *la quantité* x nous poserons avec M. *Hilbert* $k' = k_t + w_1 k_w + w_2 k_{w_1} + \dots + w_r k_{w_{r-1}}$. Alors l'identité (30.) donne par dérivation par rapport à t et par rapport à w_r

$$(31.) \qquad \lambda' = \lambda_t + w_1 \lambda_w + \dots + w_{r+1} \lambda_{w_r} \equiv f' + f_x \cdot \varphi',$$

$$(32.) \qquad \lambda_{w_r} \equiv f_x \cdot \varphi_{w_r}$$

ou encore en vertu de (25.)

$$(33.) \quad \lambda' \equiv f_x \cdot \varphi' \qquad \text{ou} \qquad (34.) \quad \mu = f_x,$$

d'où en comparant les relations (31.) et (33.) on prend

$$(35.) \qquad f' \equiv 0.$$

Dérivons de nouveau par rapport à t et par rapport à w_r les deux membres de la relation (34.); nous avons

$$(35'.) \quad \mu' \equiv (f_x)' + f_{xx} \cdot \varphi', \qquad (36.) \quad \mu_{w_r} \equiv f_{xx} \cdot \varphi_{w_r}$$

et, par suite, en vertu des équations (29.)

$$(37.) \qquad (f_x)' \equiv 0.$$

D'autre part, l'identité (35.) par dérivation par rapport à w_r donne

$$(38.) \qquad (f_x)' \cdot \varphi_{w_r} + f_{w_{r-1}} \equiv 0$$

d'où il résulte en tenant compte de (37.)

$$(39.) \qquad f_{w_{r-1}} \equiv 0.$$

Par le symbole $\equiv$ nous entendons que les deux membres deviennent égaux après la substitution de x par la fonction $\varphi(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, w_r)$. En disant donc que $f_{w_{r-1}}(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, x) \equiv 0$ nous entendons que la fonction qui résulte par dérivation partielle par rapport à w_{r-1} et qui sera une fonction de $t, w, w_1, \dots w_{r-1} x$, soit $F(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, x)$, devient égale à zéro si l'on substitue x par φ à savoir

$$(40.) \qquad F(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, \varphi(t, w, w_1, \dots w_{r-1}, w_r)) \equiv 0;$$

il faudrait donc qu'on eût

(41.) $$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \varphi_{w_r} \equiv 0$$

ce qui donnerait

(42.) $$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0;$$

donc $f_{w_{r-1}}$ ne contient pas de x. Pour être donc égal à zéro, il faut que f ne contienne pas de w_{r-1} indépendamment de x. Or f', d'après notre définition, signifie l'expression $f_t + w_1 f_w + \cdots + w_{r-1} f_{w_{r-2}} + w_r f_{w_{r-1}}$ où $f_{w_{r-1}}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à w_{r-1} indépendamment de x; or celle-ci, comme nous l'avons dit, est égale à zéro; donc

(43.) $$f' = f_t + w_1 \cdot f_w + w_2 \cdot f_{w_1} + \cdots + w_{r-1} \cdot f_{w_{r-2}}.$$

Nous observons maintenant que f contient w_r non explicitement, mais au moyen de x, par conséquent il arrive la même chose aux $f_t, f_w, \ldots f_{w_{r-2}}$; d'autre part, aux coefficients de f' nous n'avons pas w_r, donc f' est une fonction de $t, w, w_1 \ldots w_{r-1}, \varphi(t, w, w_1, \ldots w_r)$, soit

(44.) $$f' = \sigma(t, w, w_1, \ldots w_{r-1}, \varphi(t, w, \ldots w_r)).$$

Pour avoir donc $\sigma \equiv 0$ il faudrait avoir $\sigma_{w_r} \equiv 0$ ou encore $\sigma_\varphi \cdot \varphi_{w_r} \equiv 0$, c'est-à-dire $\sigma_\varphi \equiv 0$; donc σ ne contient pas φ et il reste que f' devrait être égal à zéro identiquement et par rapport à $t, w, w_1, \ldots w_{r-1}$, et d'après ce qui précède, pour l'être par rapport à w_{r-1}, il faut que le coefficient $f_{w_{r-2}} \equiv 0$; à savoir f ne contient pas w_{r-2} explicitement; donc pour que f' soit égal à zéro par rapport à w_{r-2}, il faut que le coefficient $f_{w_{r-3}} \equiv 0$, à savoir f ne contient pas w_{r-3} explicitement, et ainsi de suite; et nous arrivons à la conclusion que f ne contient aucune des quantités $t, w, w_1, \ldots w_{r-1}$ explicitement; il peut contenir seulement x. Si je compare (29.) et (36.), je trouve

(45.) $$\frac{d^3 y}{dx^3} = f_{xx}.$$

Mais de l'identité (30′.) on tire $\varrho' = g' + g_x \cdot \varphi'$, $\varrho_{w_r} = g_x \cdot \varphi_{w_r}$ d'où en vertu de (28.)

(46.) $\varrho' = g_x \cdot \varphi'$, (47.) $g' \equiv 0$

et comme on a $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\varrho'}{\varphi'}$, on en déduit

(48.) $$\frac{d^2 z}{dx^2} = g_x.$$

On aura donc, d'après l'équation (15.)

(49.) $$g_x = (f_{xx})^2$$

d'où on voit que g_x dépend seulement de x comme f_{xx}; et, par suite

(50.) $$g = X + W$$

où X dépend seulement de x et W de $t, w, w_1, \dots w_{r-1}$, et comme on a $g' \equiv 0$, on en déduit $W =$ const. donc, g dépend seulement de x. On aura donc, en réunissant ces résultats

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \equiv f(x), \quad \frac{dz}{dx} = \varrho \equiv g(x)$$

les fonctions f et g contenant seulement x, et il est maintenant très aisé d'aboutir à l'impossibilité dont il s'agit. Il suffirait de remarquer que dans la solution (2.) nous supposons $r \geq 1$.

4. — Si l'on fait maintenant des raisonnements analogues à ceux du N°. 2 on démontre la même proposition pour une équation de la forme (14.). On pourrait facilement démontrer avec la méthode de M. *Hilbert* pour d'autres équations différentielles qu'il n'existe pas une solution de la forme (2.). On pourrait aussi démontrer que si un système de la forme

(1′.) $$f\Big(x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}\Big) = 0,$$

(2′.) $$F\Big(x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}\Big) = 0$$

avait une solution de la forme

(3′.) $$x_i = \varphi_i(t, w, \dots w_r),$$

alors une équation de la forme

(4′.) $$\frac{dz}{dx} = \varphi\Big(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\Big)$$

aurait également une solution de la forme (3′.). Différencions en effet les équations (1′.), (2′.). On prend

(5′.) $$f_{x_1} + f_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + f_{x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + f_{x_4}\frac{dx_4}{dx_1} + f_{\frac{dx_2}{dx_1}}\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} + f_{\frac{dx_3}{dx_1}}\frac{d\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)}{dx_1} = 0,$$

(6′.) $$F_{x_1} + F_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0.$$

Éliminons entre les équations (1′.), (2′.), (5′.), (6′.) les quantités x_2, $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1}$. J'aurai en général, une équation de la forme

$$H\left(x_1, x_3, x_4, \frac{dx_3}{dx_1}, \frac{dx_4}{dx_1}, \frac{d\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)}{dx_1}\right) = 0.$$

Imaginons qu'on l'ait résolue par rapport à $\frac{dx_4}{dx_1}$. Soit qu'on ait

$$(7'.) \qquad \frac{dx_4}{dx_1} = \sigma\left(x_1, x_3, x_4, \frac{dx_3}{dx_1}, \frac{d\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)}{dx_1}\right).$$

En posant $x_1 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$ nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$(8'.) \qquad \frac{dz}{dx} = \sigma\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right);$$

on observe donc que si les équations (3'.) formaient une solution du système (1.', 2.'), les équations $x = \varphi_1(t, w, w_1, \ldots w_r)$, $y = \varphi_3$, $z = \varphi_4$ donneraient une solution de l'équation (8'.).

5. — Soit enfin le système

$$(9'.) \qquad f_1\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \frac{dx_4}{dx_1}\right) = 0,$$

$$(10'.) \qquad f_2\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \frac{dx_4}{dx_1}\right) = 0.$$

Supposons que ce système se vérifie par les valeurs des x_i tirées des équations

(P.)

$$(11'.) \quad V(x_1, x_2, x_3\, x_4, \xi) = n, \qquad (13'.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{d^2 n}{d\xi^2},$$

$$(12'.) \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{dn}{d\xi} \qquad (14'.) \quad \frac{\partial^3 V}{\partial \xi^3} = \frac{d^3 n}{d\xi^3}$$

où n désigne une fonction arbitraire de ξ.

Ou, plus précisément, supposons que les équations (9'.), (10'.) résultent de l'élimination de ξ entre les équations

$$(A.) \quad \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial x_i}\, dx_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^3 V}{\partial \xi^2 \partial x_i}\, dx_i = 0.$$

Posons

$$(12''.) \qquad \frac{dn}{d\xi} = J, \quad \frac{d^2 n}{d\xi^2} = \lambda$$

et considérons comme de nouvelles coordonnées les ξ, n, J, λ. Les formules qui nous donnent les coordonnées ξ, n, J, λ en fonction des $x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \frac{dx_4}{dx_1}$ sont les suivantes:

(B.)

$$(11'.)\ V(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi) = n, \quad (16'.)\ \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + \frac{\partial V}{\partial x_4}\frac{dx_4}{dx_1} = 0,$$

$$(15'.) \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} = J, \qquad (17'.) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \lambda,$$

pendant que les x_1, x_2, x_3, x_4 sont définies en fonction des ξ, n, J, λ, $\frac{d\lambda}{d\xi}$ au moyen des relations (11'.), (15'.), (17'.) et de la suivante

$$\frac{\partial^3 V}{\partial \xi^3} = \frac{d\lambda}{d\xi}.$$

Réciproquement, on trouve les équations (12″.) en partant des équations (B.) et en tenant compte des équations (9′.), (10′.), ou encore, considérons comme des variables principales les ξ, n, J, λ et comme des paramètres auxiliaires les x_1, x_2, x_3, x_4. Formons le système

$$\text{(K.)} \qquad \frac{dn}{d\xi} = J, \quad \frac{dJ}{d\xi} = \lambda;$$

j'appellerai ce système *correspondant* du système (9′.), (10′.) dans le nouveau système de variables.

Je dis que les valeurs de ξ, n, J, λ qu'on tire des équations (11′.), (15′.), (16′.), (17′.) en fonction de $x_1, x_2, x_3, x_4, dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$ où les x, dx sont liés par les équations différentielles (9′.), (10′.) vérifient le système d'équations (K.).

Pour le voir, remarquons d'abord que des relations (12′.), (15′.), (13′.), (17′.) on déduit immédiatement les relations (K.); prenons d'autre part, les relations (11′.), (15′.), (16′.), (17′.) et les équations données (9′.), (10′.). De ces six équations résultent les équations (12′.), (13′.) et, en effet, des relations (11′.) et (16′.) résulte la relation (12′.). Or nous voyons que les équations données (9′.), (10′.) résultent de l'élimination de ξ des (A.); donc la relation (16′.) et les équations données peuvent être remplacées par les équations (A.). Mais l'équation $V = n$ et les (A.) donnent évidemment les équations (P.) et par conséquent l'équation (13′.).

6. — Voici encore une proposition qui est une généralisation d'une proposition de M. *Hilbert*, énoncée dans l'article cité.

Considérons un système de *Monge* de $m-1$ équations:

$$\text{(18′.)} \qquad f_i\left(x_1, x_2, \ldots x_{m+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots \frac{dx_{m+1}}{dx_1}\right) = 0.$$

Supposons qu'il existe une solution de ce système donnée par les équations*)

$$\text{(19′.)} \qquad V(x_1, x_2, \ldots x_{m+1}, \xi_1) = \xi_2, \ \frac{\partial V}{\partial \xi_1} = \frac{d\xi_2}{d\xi_1}, \ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2} = \frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2}, \ \ldots \frac{\partial^m V}{\partial \xi_1^m} = \frac{\partial^m \xi_2}{d\xi_1^m},$$

cela équivaut à supposer que les équations (18′.) résultent de l'élimination de ξ_1 entre les équations

*) Le problème de l'intégration de ce système consiste, comme on sait, à exprimer $x_1, x_2, \ldots x_{m+1}$ explicitement en fonction d'une variable auxiliaire ξ_1 de certaines fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées successives jusqu'à un ordre déterminé; ici je considère ξ_2 comme une fonction arbitraire de ξ_1.

(A′.) $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = 0,\ \Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1 \partial x_i} dx_i = 0,\ \Sigma \frac{\partial^3 V}{\partial \xi_1^2 \partial x_i} dx_i = 0, \dots \Sigma \frac{\partial^m V}{\partial \xi^{m-1} \partial x_i} dx_i = 0.$

Posons

(E.) $$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \xi_3,\ \frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = \xi_4,\ \frac{d^3\xi_2}{d\xi_1^3} = \xi_5, \dots \frac{d^{m-1}\xi_2}{d\xi_1^{m-1}} = \xi_{m+1}.$$

Considérons maintenant les ξ_i $(i = 1, 2, \dots m+1)$ comme coordonnées nouvelles. Les équations qui définissent les x_i en fonction des ξ_i, $\frac{d\xi_{m+1}}{d\xi_1}$ sont les suivantes

('P.) $$V(x_1, x_2, \dots x_{m+1}, \xi_1) = \xi_2,\ \frac{\partial V}{\partial \xi_1} = \xi_3,\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2} = \xi_4, \dots \frac{\partial^{m-1} V}{\partial \xi_1^{m-1}} = \xi_{m+1},\ \frac{\partial^m V}{\partial \xi_1^m} = \frac{d\xi_{m+1}}{d\xi_1},$$

pendant que les équations qui définissent les ξ_i au moyen des x_i, $\frac{dx_k}{dx_1}$ seront les équations

(H.) $$\sum_{\lambda=1}^{m+1} \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} dx_\lambda = 0,\ V(x_1, x_2, \dots x_{m+1}, \xi_1) = \xi_2,\ \frac{\partial V}{\partial \xi_1} = \xi_3,\ \frac{\partial^{m-1} V}{\partial \xi^{m-1}} = \xi_{m+1}.$$

Nous sommes arrivés aux relations (H.) en partant des relations (E.). Inversement, on peut trouver les équations (E.) en partant des équations (H.) et en tenant compte des équations (18′.) ou encore.

Formons les équations différentielles par rapport aux ξ_i

(K′.) $$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \xi_3,\ \frac{d\xi_3}{d\xi_1} = \xi_4, \dots \frac{d\xi_m}{d\xi_1} = \xi_{m+1}.$$

Je dis que les valeurs des ξ_i tirées en fonction des x, dx des équations (H.) vérifient les équations du système (K′.) si l'on tient compte des relations données du système (18′.). Il suffit évidemment de démontrer que les équations (K′.) sont des conséquences des équations (H.) et (18′.). Observons tout de suite que les équations (18′.) et la première des équations (H.) font un système équivalent au système (A′.), car nous avons supposé que les équations (18′.) résultent de l'élimination de ξ_1 entre les équations (A′.). D'autre part, du système (A′.) et de l'équation $V = \xi_2$ on déduit les équations (19′.). En comparant alors les équations (19′.) aux équations (H.) nous voyons que:

(E.) $$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \xi_3,\ \frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = \xi_4, \dots \frac{d^{m-1}\xi_2}{d\xi_1^{m-1}} = \xi_{m+1}$$

ou encore:

(K′.) $$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \xi_3,\ \frac{d\xi_3}{d\xi_1} = \xi_4, \dots \frac{d\xi_m}{d\xi_1} = \xi_{m+1}.$$

II. Sur la méthode de M. *Goursat* relative à l'intégration d'un système de *Monge*.

7. — Soit donné un système de *Monge*.

$$f_i(x_1, x_2, \dots x_{n+1}, dx_1, dx_2, \dots dx_{n+1}) = 0 \qquad (i=1,2,\dots n-1)$$

(où les f sont des fonctions homogènes par rapport à $dx_1, dx_2, \dots dx_{n+1}$). Si l'on cherche à exprimer $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ explicitement en fonction d'une variable auxiliaire t, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées successives jusqu'à un ordre déterminé on peut essayer d'y appliquer la méthode relative de M. *Goursat**). Cette méthode s'applique toutes les fois qu'un certain système associé de la forme

$$(1.) \qquad F_\lambda(x_1, x_2, \dots p_1, p_2, \dots p_n) = 0 \qquad (\lambda=1,2,\dots n-1)$$

est en involution. Ce système résulte par l'élimination d'un paramètre entre n équations de la forme

$$(2.) \qquad \sigma_i(x_1, x_2, \dots p_1, p_2, \dots p_n, \alpha) = 0. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

8. — *Réciproquement*, on peut chercher des systèmes de *Monge* où la méthode de M. *Goursat* s'applique. On se trouve alors devant la question suivante:

Dans quels cas l'élimination de α entre les équations (2.) donne-t-elle un système en involution?

9. — Je me propose de faire quelques remarques relatives à cette question. — Supposons pour la simplification de l'écriture que la variable x_{n+1} ne figure pas dans les équations (2.).

10. — Soit que la valeur de α tirée d'une des relations du système (2.) comme fonction des x et des p donne

$$(3.) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_{\nu_1}} = 0, \qquad (4.) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial p_{\mu_1}} = 0$$

où les ν_1 et μ_1 prennent de certaines valeurs comprises entre $1, 2, \dots n$; soit, pour fixer les idées, qu'on ait $\nu_1 = 1, 2, \dots \vartheta$, $\mu_1 = 1, 2, \dots \xi$; alors si on représente par ν_2 les valeurs $\vartheta+1, \vartheta+2, \dots n$ et par μ_2 les valeurs $\xi+1, \xi+2, \dots n$ et si on suppose qu'on ait

$$(5.) \qquad \frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial \alpha}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_{\nu_2}} - \frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_{\nu_2}}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(6.) \qquad \frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_{\mu_2}}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \alpha} - \frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial \alpha}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_{\mu_2}} = 0, \qquad \begin{matrix}(\varrho, \mu=1,2,\dots n-1)\\ (k=1,2,\dots n)\end{matrix}$$

$$(7.) \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_k} - \frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_k}\right) = 0,$$

---

*) Voir l'article cité de M. *Goursat*.

on est alors assuré que le système (1.) est en involution et, en effet, remarquons que si on substitue la valeur de α tirée d'une des relations du système (2.) dans les autres relations du même système, on prendra d'après nos hypothèses les relations (1.). Pour calculer donc les parenthèses de *Poisson* pour les fonctions F_λ il suffit de calculer les expressions suivantes:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_k}+\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_k}\Big)\Big(\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_k}+\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p_k}\Big)-\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_k}+\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p_k}\Big)\Big(\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_k}+\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_k}\Big),$$

où s désigne la fonction des quantités $x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n$ qui remplace la quantité α, ou encore

$$(8.)\quad \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_k}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_k}\Big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial s}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_k}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}\Big)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial s}{\partial p_k}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_k}\Big).$$

— Mais on peut évidemment écrire ces expressions comme il suit

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_k}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_k}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_k}\Big)$$
$$+\sum_{\nu_1=1}^{\vartheta}\frac{\partial s}{\partial x_{\nu_1}}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_{\nu_1}}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_{\nu_1}}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}\Big)+\sum_{\mu_1=1}^{\xi}\frac{ds}{\partial p_{\mu_1}}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_{\mu_1}}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_{\mu_1}}\Big)$$
$$+\sum_{\nu_2=\vartheta+1}^{n}\frac{\partial s}{\partial x_{\nu_2}}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial p_{\nu_2}}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial p_{\nu_2}}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}\Big)+\sum_{\mu_2=\xi+1}^{n}\frac{\partial s}{\partial p_{\mu_2}}\Big(\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_{\mu_2}}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial s}-\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x_{\mu_2}}\Big).$$

Or en vertu des conditions (3.), (4.), (5.), (6.), (7.) les valeurs de ces expressions seront nulles. Notre proposition est donc démontrée.

11. — Pour appliquer cette proposition dans la méthode de M. *Goursat* nous ferons les remarques suivantes.

1°. — Le système (1.) est linéaire par rapport aux p, et par conséquent les dérivées partielles des fonctions F par rapport aux p sont des fonctions seulement des x et des α (nous imaginons qu'on n'a pas encore fait la substitution de α).

2°. — Si on résout la dernière équation du système (1.) par rapport à α, on prend pour α une valeur telle qu'on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p_1}=0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial p_2}=0.$$

3°. — Nous avons

$$\frac{\partial \sigma_{\varrho_1}}{\partial p_1}=0, \qquad \frac{\partial \sigma_{\varrho_1}}{\partial p_2}=0. \qquad (\varrho_1=3, 4, \dots n)$$

12. — En particulier, pour le cas considéré dans la note du 25 mai 1908, on aura de plus

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_{\nu_1}} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial x_{\nu_1}} = 0. \qquad (\nu_1 = 2, 3, \ldots n),\ (\varrho = 1, 2, \ldots n)$$

Alors les expressions (8.) se réduisent évidemment aux suivantes

$$\frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial s} \qquad [\alpha = s(x_1, x_2, \ldots p_3, p_4, \ldots)]\ (\lambda = 2, 3, \ldots n-1)$$

ou

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1}$$

et, par conséquent, les conditions pour que le système (1.) soit en involution peuvent se présenter par les relations

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} = 0, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n-1)$$

et on voit encore que ces relations subsistent si l'on prend $\frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial x_1} = 0$ et $\frac{\partial s}{\partial x_1} = 0$. Nous retrouvons ainsi immédiatement les résultats de la note citée, comme des cas particuliers de résultats plus généraux.

(630)

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 143.

Heft 4.

Ausgegeben den 28. Oktober.

Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1913.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Diesem Heft liegt ein Prospekt der

G. J. Göschen'schen Verlagshandlung G. m. b. H.

Band 143. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Sturm, R., Existenzbeweis des Punktes kleinster Entfernungssumme von vier gegebenen Punkten . . . . . Seite 241

Remak, R., Abschätzung der Lösung der *Pell*schen Gleichung im Anschluß an den *Dirichlet*schen Existenzbeweis . . . . . — 250

Ostrowski, A., Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie . . . — 255

Koschmieder, L., Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe . . . . . — 285

Pál, J., Über die Existenz einer *Jordan*schen Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ bei vorgeschriebenem $\varphi(t)$ . . . . . — 294

Zervos, P., Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles . . . . . — 300

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

MATHEMATISCHE WERKE

AUS DEM VERLAGE VON GEORG REIMER BERLIN W. 10

Baer, O., Éléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du collège royal français. 8. 1885 . . . . . geb. 2.50
— — Éléments de géométrie plane à l'usage des élèves du collège royal français. 8. 1887 . . . . . geb. 3.—

Ball, Rob. S., Theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten Ball's herausgegeben von H. Gravelius. Mit 2 Abbildungen. 8. 1889 . . . . . 14.—

Borchardt, C. W., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von G. Hettner. Mit Borchardts Bildnis. 4. 1888 . . . . . 17.—

Brunn, Hermann, Beziehungen des du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Eine mathematische Studie. 1905 . . . . . 7.—

Budde, E., Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 8. 1890 . . . . . 7.—
— — II. Band: Mechanische Summen und starre Gebilde. 8. 1891 . . . . . 8.—

Burrau, Dr., Carl, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus. Mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- und Hyperbelfunktionen). 1907 . . . . . geb. 4.—

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen; mit Tafeln der Quadrat und Kubikzahlen von 1 bis 1000. Besorgt von O. Seeliger. . . . . 15.—

Dirichlet, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band. Herausgegeben von L. Kronecker. Mit Dirichlets Bildnis. 1889 . . . . . 21.—
II. Band. Herausgegeben von L. Kronecker, fortgesetzt von L. Fuchs. 1897 . . . . . 18.—

Eisenstein, G., Mathematische Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen. Mit einer Vorrede von Gauß. 4. 1847 . . . . . 4.—
— — Tabelle der reduzierten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. 4. 1851 . . . . . 1.—

Emmerich, Dr. A., Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Mit 50 Figuren im Text und einer lithogr. Tafel. 8. 1891 . . . . . 5.—

Gravelius, H., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Dezimalteilung der Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Übergang von der neuen Teilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Professor Dr. W. Foerster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 8. 1885 . . . . . geb. 6.—

Haentzschel, E., Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heines Handbuch der Kugelfunktionen. 8. 1893 . . . . . 6.—

Heine, E., Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie und Anwendungen. I. Band: Theorie (vergriffen). 1878. —
II. Band: Anwendungen. 1881 . . . . . 6.—

Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band. Herausgegeben von C. W. Borchardt. Mit dem Bildnis Jacobis. 1881 . . . . . 18.—
II.—VII. Band. Herausgegeben von K. Weierstraß. 1882—1891 . . . . . 99.—
Supplementband. Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von E. Lottner. 1884 . . . . . 10.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski, sowie der Berliner Mathematischen Gesellschaft, herausgegeben von Emil Lampe.

Bis jetzt erschienen 41 Bände zu verschiedenen Preisen.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. I. Band. 1890—91. 8. 1892 . . . . . 7.60
— — — — II. Band. 1891—92. 8. 1893 . . . . . 4.50
— — — — III. Band. 1892—93. 8. 1894 . . . . . 16.—
— — — — IV. Band. 1894—95. 8. 1897 . . . . . 16.—

Joachimsthal, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Dritte Auflage, verbessert und durch einen Anhang von Aufgaben und deren Lösungen vermehrt von O. Hermes. Mit 8 Figurentafeln. 8. 1883 . . 3.60

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle. 1826. Herausgegeben von K. Hensel. Jährlich erscheinen etwa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band . . . . 16.—

Bis jetzt erschienen 142 Bände.

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift zu E. E. Kummers 50jährigem Doktor-Jubiläum am 10. September 1881. 8. 1882 . . . . . 6.—

Peters, J., Neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. 1909 . geb. 15.—
— — Fünfstellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten geb. 7.—

Schellbach, K. H., Neue Elemente der Mechanik, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt. Mit 12 Figurentafeln. 8. 1860 . . . . . 5.50
— — Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Funktionen. 8. 1864 . . . . . 6.—
— — Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. 8. 1887 . . . . . —.80

Schulte-Tigges, A., Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 2. Auflage. 1904 . . . . . 3.—

Steiner, J., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von K. Weierstraß. 8.
I. Band: Mit 44 Tafeln und Steiners Bildnis. 1881 . . . . . 16.—
II. Band: Mit 23 Tafeln. 1882 . . . . . 18.—

Wiecke, P., Lehrproben. Geometrische und algebraische Betrachtungen über Maxima und Minima. Zum Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht als Vorbereitung für den Besuch deutscher Hochschulen. Mit Figuren im Text und 7 Tafeln. 8. 1894 . . . . . kart. 5.—

Wolff, F., Lehrbuch der Geometrie. 8.
1. Teil. Ebene Elementargeometrie, Trigonometrie, Teilungslehre. 8. verbesserte Auflage. Mit 7 Kupfertafeln. 1870 . . . . . 5.—
2. Teil. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Mit 2 lithogr. Tafeln. 5. verbesserte Auflage. 1872 . . . 3.—